Билет 1

Формулировка задачи:

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j y_j - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

(1) $\sum_{s\in A(r)} f_{rs} - \sum_{s\in B(r)} f_{sr} = \sum_{i\in r} x_i - \sum_{j\in r} y_j \quad \forall r$

(2) $\underline{f}_{rs} \le f_{rs} \le \overline{f}_{rs} \quad \forall (r,s)$

(3) $0 \le x_i \le V_i, \ i=\overline{1,n}$

(4) $0 \le y_j \le V_j, \ j=\overline{1,m}$

В задаче фигурир. n поставщиков и m потреб-лей, которые распр-ны по узлам сети и участвуют в сетевом аукционе

x_i - объем для поставки поставщика i; V_i - max. объем

y_j - объем для потребления потребителем j; V_j - max. объем

c_i - ценовая заявка поставщика i

$\bar{c}_j$ - ценовая заявка потребителя j

$r = \overline{1,N}$ - индекс узла

A(r) - мн-во ветвей, выход. из r $\{s \mid \exists (r,s)\}$

B(r) - мн-во ветвей, вход. в r $\{s \mid \exists (s,r)\}$

f_{rs} - поток из узла r в узел s; $\underline{f}_{rs}$ и $\overline{f}_{rs}$ - нижн. и верх. гран.

Огр. (1) - материальный баланс в узле r

Огр. (2) - пропускн. способность ветви (r, s)

Огр. (3) и (4) - огр. поставки и потребления

Можно ввести множ. Лагранжа к огр. (1) - (4):

(1) - λ_r

(2) - $\underbrace{\sigma^{+}_{rs}}_{\ge 0}, \underbrace{\sigma^{-}_{rs}}_{\ge 0}$

(3) − $\underbrace{\overline{\pi}_i^-}_{\geq 0}$, $\underbrace{\overline{\pi}_i^+}_{\geq 0}$

(4) − $\underbrace{\overline{\pi}_j^-}_{\geq 0}$, $\underbrace{\overline{\pi}_j^+}_{\geq 0}$

Поиск. равновесн. объемов и цен состоит в решении задачи оптимизации, после чего:

λ_r^* − цена в узле r

x_i^*, y_j^* − объемы участников аукциона

Билет 2

Пусть $0 \le x_i \le V_i$, $i = \overline{1,n}$ - n - кол-во поставщиков
$b = \overline{1,N}$, N - кол-во узлов
$0 \le y_j \le V_j$, $j = \overline{1,m}$ - m - кол-во потребителей
c_i - заявка поставщика
$\overline{c}_j$ - заявка потребителя
(r,k) - ветка
f_{rk} - поток из r в k

Целевая ф-ция: $\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{c}_j y_j - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$

Если есть стоимость перевозки, c_f - стоимость потока

$$\sum_{j=1}^{m} c_j y_j - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{(r,k)} c_f^{rk} f_{rk} = g(x,y)$$

Но: у нас издержки постоянны. Траты лишь на поддерж. в раб. состоянии
\+ невозможно контрол., по каким именно проводам течет ток.

1) Материальный баланс в узлах сети:
A(b): ветви вида (b,k)
B(b): ветви вида (k,b)

$$\sum_{k\in A(b)} f_k - \sum_{r\in B(b)} f_r = \underbrace{\sum_{i\in b} x_i}_{\text{поставщики в узле } b} - \underbrace{\sum_{j\in b} y_j}_{\text{потребители в узле } b} \Rightarrow h(x,y,f)$$

2) Пропускная способность
$$\underline{f}_{rk} \le f_{rk} \le \overline{f}_{rk} \Rightarrow s(f)$$

3) Ограничения поставки/потребления
$$0 \le x_i \le V_i,\ i=\overline{1,n} \qquad \Rightarrow \overline{u}(x), \overline{v}(y)$$
$$0 \le y_j \le V_j,\ j=\overline{1,m} \qquad \underline{u}(x), \underline{v}(y)$$

Множители Лагранжа к

1) ур. мат. баланса

λ_B

2) пропускн. способности

$\underset{\geq 0}{\sigma^+_{rk}}$, $\underset{\geq 0}{\sigma^-_{rk}}$: $\sigma^+_{rk}(\bar{f}_{rk} - f_{rk}) = 0$

$\sigma^-_{rk}(f_{rk} - \underline{f}_{rk}) = 0$

3) огр. поставки/потребления:

$\underset{\geq 0}{\pi_i^-}$ $\underset{\geq 0}{\pi_i^+}$ $\underset{\geq 0}{\overline{\pi}_j^-}$ $\underset{\geq 0}{\overline{\pi}_j^+}$

$\Rightarrow L(x, y, f, \lambda, \sigma, \pi) = g$ - ограничения

$L = g - \sum_B \lambda_B h_B - \sum \sigma^+_{rk} \bar{s}_{rk} + \sum \sigma^-_{rk} \underline{s}_{rk} - \sum \pi_i^+ \bar{u}_i + \sum \pi_i^- \underline{u}_i -$

$- \sum \overline{\pi}_j^+ \bar{V}_j + \sum \overline{\pi}_j^- \underline{V}_j$

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -c_i + \lambda_B - \pi_i^+ + \pi_i^- = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \bar{c}_j - \lambda_B - \overline{\pi}_j^+ + \overline{\pi}_j^- = 0$

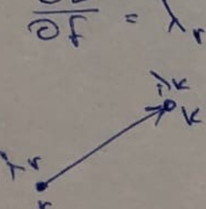
$\lambda_B = c_i + \pi_i^+ - \pi_i^-$

Если так объем $\Rightarrow \pi_i^- = 0 \Rightarrow \lambda_b$ - цена и поставщик имеет доп. прибыль $\cancel{\lambda_B}$

$\lambda_B = \bar{c}_j - \overline{\pi}_j^+ + \overline{\pi}_j^-$

Если заявка потребителя полностью удовл. $\Rightarrow \overline{\pi}_j^- = 0 \Rightarrow$ и потребитель платит $< \bar{c}_j$

$\frac{\partial L}{\partial f} = \lambda_r - \lambda_k + \sigma^+_{rk} - \sigma^-_{rk} = 0$



Если поток не достигает пределов $\Rightarrow$

$\sigma^+_{rk} = \sigma^-_{rk} = 0 \Rightarrow \lambda_r = \lambda_k$

$\lambda_k = \lambda_r + \sigma^+_{rk} - \sigma^-_{rk}$

цена в k выше $\Leftarrow$ $\uparrow = 0$, если мы достигли
цены в r верхнего предела: $\bar{f}_{rk} = f_{rk}$

Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничением на передачу.

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j y_j - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min$$

(1) $\sum\limits_{s\in A(r)} f_{rs} - \sum\limits_{s\in B(r)} f_{sr} = \sum\limits_{i\in r} x_i - \sum\limits_{j\in r} y_j$ $\cancel{\sum\limits_{j\in r} y_j - \sum\limits_{i\in r} x_i}$ $\forall r$

(2) $\underline{f}_{rs} \le f_{rs} \le \bar{f}_{rs}$ $\forall (r,s)$

(3) $0 \le x_i \le V_i$, $i=\overline{1,n}$

(4) $0 \le y_j \le V_j$, $j=\overline{1,m}$

В задаче фигурируют n поставщиков, m потребителей, которые распределены по узлам сети и участвуют в сетевом аукционе.

x_i – объем для поставки поставщика i; V_i – максимальный объе

y_j – объем для потребление потребителем j; V_j – максимальный объе

c_i – ценовая заявка поставщика i

$\bar{c}_j$ – ценовая заявка потребителя j

$r=\overline{1,N}$ – индекс узла

$A(r)$ – множество ветвей, выходящих из r $\{s \mid \exists (r,s)\}$

$B(r)$ – множество ветвей, входящих в r $\{s \mid \exists (s,r)\}$

f_{rs} – поток из узла r в узел s; $\underline{f}_{rs}$ и $\bar{f}_{rs}$ – нижняя и верхняя границы

Ограничение (1) – Материальный баланс в узле r.

Ограничение (2) – Пропускная способность ветви (r,s)

Ограничение (3) и (4) – Ограничение поставки и потребление.

Можно ввести множители Лагранжа к ограничениям (1) - (4):

(1) - λ_z

(2) - $\sigma_{zs}^{+} \geq 0$, $\sigma_{zs}^{-} \geq 0$

(3) - $\pi_i^{-} \geq 0$, $\pi_i^{+} \geq 0$

(4) - $\overline{\pi}_j^{-} \geq 0$, $\overline{\pi}_j^{+} \geq 0$

Поиск равновесных объемов и цен состоит в решении задачи оптимизации, после чего:

λ_z^* - цена в узле z

x_i^*, y_j^* - объемы участников аукциона

$$\sum_b \lambda_b \Big(\sum_{i \in b} y_i - \sum_{i \in b} x_i \Big) = \sum_b \Big(- \sum_{k \in A(b)} f_{bk} + \sum_{r \in B(b)} f_{rb} \Big) \lambda_b =$$

V денег, потраченных
потребителями без
V денег, полученных
производителями

? ≥ 0 ?

$$= \sum_{(b,k)} -\lambda_b f_{bk} + \lambda_k f_{bk} = \sum_{(b,k)} f_{bk} (\lambda_k - \lambda_b)$$

$$= \underbrace{\sum f_{bk} \cdot 0}_{\text{не достигла пределов}} + \underbrace{\sum \bar{f}_{bk}}_{\text{если достигла верх. предела}} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_b)}_{\sigma^{+}_{bk}} + \underbrace{\sum \underline{f}_{bk}}_{\text{если достигла нижн. пред.}} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_b)}_{-\sigma^{-}_{bk}} =$$

$$= \sum \bar{f}_{bk} \sigma_{bk} - \bar{\sigma}_{bk} \underbrace{\underline{f}_{bk}}_{\leq 0} \geq 0$$

Билет 4 (не дописать, нет "усл. индивид. реш-ти")

Сформулируем з. ВСВГО как з. минимизации стоимости (cost) работы, пусков и остановов генераторов

(1) $$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in B}\left[cost(s_{ti}, p^g_{ti}) + \hat{C}^u_{ti}(s_{ti}-s_{(t-1)i})^+ + \hat{C}^d_{ti}(s_{(t-1)i}-s_{ti})^+\right] \to \min_{s,\,p^g}$$

при наличии общесистемных ограничений баланса генерации и потребления с учетом потерь в сети (ф.-ция Loss)

(2) $$\sum_{i\in B} p^g_{ti} = \hat{P}^c_t + Loss_t(p^g_t),\ t=\overline{1,T},\ p^g_t = (p^g_{t1}\ldots p^g_{ti}\ldots)$$

и огр. на макс. потоки мощности (ф. Flow) по группам линий электропередач

(3) $$Flow_{tk}(p^g_t) \le \hat{F}^{max}_{tk},\ t=\overline{1,T},\ k=\overline{1,N^{sec}_t}$$

Оптимизация в (1)-(3) произв-ся по булевым переменным состояния генераторов $s_{ti}\in\{0,1\}$ и переменным произ-ва мощности генераторами p^g_{ti}

Технолог. огр электростанций в общем виде можно представить как нелинейные огр для переменных состояний отдельных генераторов в составе групп генерир оборудования:

$$F_r(s^E, p^E) \le 0,\ r=\overline{1,N^{огр}},\ s^E=(s_{1i_1}\ldots s_{Ti_n}),\ p^E=(p^g_{1i_1}\ldots p^g_{Ti_n}),\ i_k\in E$$

состояние генер. оборуд. электростан. E на интервале планир. режима $t=\overline{1,T}$

Данные огр-ния формир связь переменных состояния в различные часы t, не позволяя рассматр. задачу оптимизации состава оборудования для каждого часа в отдельности

Рассмотрим пример:

$c_1 = 1000$ $\quad P_{min_1} = 60$ $\quad P_{max_1} = 110$

$c_2 = 700$ $\quad P_{min_2} = 30$ $\quad P_{max_2} = 80$ $\quad d = 100$

Тогда задача поиска равновесных объемов и цен для двух генераторов будет иметь вид:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \to min$$
$$x_1 + x_2 = 100 \quad | \lambda \text{ - цена}$$
$$60 \le x_1 \le 110$$
$$30 \le x_2 \le 80$$

Решением будет: $x_1^* = 60$, $x_2^* = 40$, $\lambda^* = 700$

Если рассматр. бинарн. переменные $s_i \in \{0, 1\}$

$$s_i P_{min_i} \le x_i \le P_{max_i} s_i$$

Тогда $\lambda^0 = 1000$

Формулировка задачи выбора состава включенного генерирую-щего оборудования. Нарушение условий индивидуальной рациона-льности в задаче с бинарными переменными, моделирующими состояние оборудования.

Рассмотрим пример:

$c_1 = 1000 \quad p_{min_1} = 60 \quad p_{max_1} = 110$

$c_2 = 700 \quad p_{min_2} = 30 \quad p_{max_2} = 80 \quad \big| \; d = 100$

Тогда задача поиска равновесных объемов и цен для двух генераторов будет иметь вид:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \to min$$

$$x_1 + x_2 = 100 \quad / \; \lambda - \text{цена}$$

$$60 \le x_1 \le 110$$

$$30 \le x_2 \le 80$$

Решением будет: $x_1^* = 60$, $x_2^* = 40$, $\lambda^* = 700$

Если рассматривать бинарные переменные $s_i \in \{0,1\}$

$$s_i \cdot P_{min_i} \le x_i \le P_{max_i} \cdot s_i$$

Тогда $\lambda^0 = 1000$

Билет 5

Осн.-ая ф-ция гос-ва сбор налогов и их распред.

$\mathcal{A}$ - мн-во эконом. агентов

$\mathbb{P}$ - продукты

$\mathbb{R}$ - ресурсы

Пусть $A \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{P} \cup \mathbb{R}$

$Q_i^A(t)$ ← запас ресурса i у агента A

$$0 \approx \frac{dQ_i^A(t)}{dt} = \underbrace{X_i^A(t)}_{\geq 0} - \underbrace{C_i^A(t)}_{\geq 0} - \underbrace{V_i^A(t)}_{\geq 0} - \underbrace{J_i^A(t)}_{\geq 0} - \sum_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ B \neq A}} \underbrace{X_i^{AB}(t)}$$

0 ↑ в уст. ситуации

$\frac{dQ_i^A(t)}{dt}$ ↑ материальный баланс

$X_i^A(t)$ — производство; $C_i^A(t)$ — конечное потреб.; $V_i^A(t)$ — затраты на произ-во (текущие; $J_i^A(t)$ — капитальные затраты; $X_i^{AB}(t)$ — передача продукта

Товары передаются без потерь: $X_i^{AB}(t) = -X_i^{BA}(t)$

Товары: 1) складируемые: $Q_i^A(t) \geq 0$, $A \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{P} \cup \mathbb{R}$

2) нескладируемые: $\frac{dQ_i^A(t)}{dt} \geq 0$, $A \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{P} \cup \mathbb{R}$

Предположим, что 1 агент производит 1 товар, т.е. в уст. ситуации запас товара у произ-ля не изменится.

$Y_i^A = X_i^A(t) - V_i^A(t)$ - чистый выпуск

$Y_i^A \leq M_i^A(t)$ - произв. мощность

(основные ср-ва производства стареют, но могут наращ. за счет кап. затрат.)

Будем считать, что один произв-ль произв-т 1 товар

$$dM^A(t) = -\mu^A M^A(t) + \frac{J^A}{b^A}$$

μ^A ↑ портится; $\frac{J^A}{b^A}$ — вложения кап. затр.

μ_A - коэф износа

Есть еще моральное старение. Его тоже нужно учитывать (амортизация)

$$Y_i^A = C_i^A + J_i^A + \sum_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ A \neq B}} X_i^{AB}$$ - ур. баланса агента A (для стабильного предприятия)

Чтобы выйти на макроуровень нужно перейти к финансовым эквив-там: $X_i^{AB}(t) \sim \Phi_i^{BA}(t)$ - платежи

(потоку товаров сразу идет поток платежей)

$$X_i^A \sim \tilde{X}_i^A, \quad Y_i^A \sim \tilde{Y}_i^A, \quad V_i^A \sim \tilde{V}_i^A, \quad J_i^A \sim \tilde{J}_i^A, \quad C_i^A \sim \tilde{C}_i^A$$

денежные потоки

Пусть в экономике ед. цены. Тогда

$$\tilde{Y}_{IP}^A = \tilde{C}_{IP}^A + \tilde{J}_{IP}^A + \sum_{i \in IP} \sum_{B \in \mathcal{A}} \phi_i^{BA}$$

X_i^{AB} - A передает товар B $\Rightarrow$

$\Rightarrow \phi^{BA}$ - B передает деньги A

где $\tilde{Y}_{IP}^A = \sum_{i \in IP} Y_i^A$ - добавленная стоимость

$\tilde{C}_{IP}^A = \sum_{i \in IP} \tilde{C}_i^A$ - потребит. расходы

$\tilde{J}_{IP}^A = \sum_{i \in IP} \tilde{J}_i^A$ - инвестиции

$\tilde{X}_{IP}^A = \sum_{i \in IP} \tilde{X}_i^A$ - объем произв-ва

$\hat{V}_{IP}^A = \sum_{i \in IP} \tilde{V}_i^A$ - материальные затраты

$$\frac{d\tilde{k}^A}{dt} = \tilde{J}_{IP}^A - \underbrace{\mu^*}_{\text{норма амортизации}} \tilde{k}^A$$

Просуммир балансы по всем агентам из $N \subseteq \mathcal{A}$.

$$\tilde{Y}_{IP}^N + \tilde{I}_{IP}^N = \tilde{C}_{IP}^N + \tilde{J}_{IP}^N + \tilde{E}_{IP}^N$$ ← основное макроэконом. баланс / тождество

где $\tilde{Y}_{IP}^N$ - валовый внутр. продукт

$\tilde{C}_{IP}^N$ - конечное потребление

$\tilde{J}_{IP}^N$ - накопление

$\tilde{E}_{IP}^N = \sum_{A \in N} \sum_{B \notin N} \left[\varphi_{IP}^{BA} \right]_+$ - экспорт

$\tilde{I}_{IP}^N = \sum_{A \in N} \sum_{B \notin N} \left[\varphi_{IP}^{AB} \right]_+$ - импорт

Билет 5 (продолжение)

Рассмотрим агента - домашнее хоз-во $a \in H$.
Покупает продукт в кол-ве c^a, за котор. платит сумму: $\Phi_c^{aT} = \tilde{p} C^a$, $c^H = c$

Домашн. хоз-во продает труд произв-лю, получ. з/п.

$$\Phi_L^{Pa} = s L^a, \quad L^H = L^P = L$$

Домашн. хоз-во: 1) может получать дивиденды.
2) платит налоги и получает трансферты
3) имеет сбережения в банках

Фин. баланс дом. хоз-ва:

$$\underbrace{\frac{dN^a}{dt}}_{\text{прирост наличных денег}} = \underbrace{\Phi_L^{Pa}}_{\text{з/п. на произ-ве}} - \underbrace{\Phi_c^{aT}}_{\text{потреб. расходы}} + \underbrace{T^{Ba}}_{\text{дивиденды банков}} + \underbrace{T^{Pa}}_{\text{дивиденды произв-лей}} - \underbrace{T^{ag}}_{\text{налоги}} + \underbrace{T^{ga}}_{\text{пособия и з/п. гос. служащих}} - \underbrace{\frac{dL^{aB}}{dt}}_{\text{прирост сбережений}} + \underbrace{R^{Ba}}_{\text{проц. платежи по вкладам}}$$

Фин. баланс в общем виде: деньги - главное ср-во передачи информации в экономике, яв. аддит. вел-ной $\Rightarrow \forall$ агент $a \in A$ в t имеет запас денег $N^a(t)$. Измен. этого запаса обусл. денежн. потоками:

- запас денег меняют платежи за продукты $\sum_{i\in P}\sum_{b\in A}(\Phi_i^{ab} - \Phi_i^{ba})$ и ресурсы $\sum_{i\in R}\sum_{b\in A}(\Phi_i^{ab} - \Phi_i^{ba})$
- запас денег меняется из-за трансферт T^{ab}
- запас денег изменяют отнош. заимствования L^{ba}
- заимствование L^{ba} сопровожд. потоками % платежей R^{ab}

$$\frac{dN^a}{dt} = \sum_{b\in A}\sum_{i\in P}(\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b\in A}\sum_{i\in R}(\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b\in A}(T^{ba} - T^{ab}) + \sum_{b\in A}\left(\frac{dL^{ab}}{dt} - \frac{dL^{ab}}{dt}\right) + \sum_{b\in A}(R^{ba} - R^{ab})$$

Если сложить все балансы по $a \in A$, то $\frac{d}{dt}\sum_{a\in A} N^a = 0$

Билет 6 (не дописан)

Пусть A - матр. технолог. затрат

n - кол-во отраслей

ξ_j - произв. мощность j-ой отрасли

η_j - прирост. мощности j-ой отрасли

$\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ - вектор мак. возможного выпуска

$(\eta_j d_{1j} \dots \eta_j d_{nj})$ - затраты на увел мощности на η_j

$P = (p_1 \dots p_n)$ - труд. затраты

L - общее кол-во занятых в экономике

$c = (c_1 \dots c_n)$ - вектор. потреб. на 1-го рабочего

Выпишем динам. систему, опис. развитие экономики в течение конечн. числа периодов времени $t = 1, \dots, T$:

$$(*)\begin{cases} Ax(t) + D\eta(t) + L(t)c \le x(t) \\ x(t) \le \xi(t-1) \\ \xi(t) \le \xi(t-1) + \eta(t) \\ \langle P, x(t)\rangle \le L(t) \\ (x(t), \eta(t), \xi(t), L(t)) \ge 0 \end{cases}$$

Опис. экономич. системы с помощью модели $(*)$ опр-ся траекторией $(x(t), \xi(t), \eta(t), L(t))$, $t = \overline{1,T}$, удовл. системе нер-в. В общем сл. $\exists$ беск. много траекторий, удовл. $(*)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нужно ввести критерий оценки качества траектории. Например, расм. конечное (терм.) сост. эк-ки $(x(T), \xi(T), \eta(T), L(T))$ и в качестве цел. функционала: $\langle c_1, x(T)\rangle + \langle c_2, \xi(T)\rangle + \langle c_3, \eta(T)\rangle + c_4 L(T)$, где c_1, c_2, c_3 - n-мерные векторы, c_4 - число

Тогда модель $(*)$ можно переписать:

$$\begin{cases} \max\langle \tilde{c}, \tilde{x}(T)\rangle \\ \tilde{A}\tilde{x}(t) \le \tilde{B}\tilde{x}(t-1) \\ \tilde{x}(t) \ge 0,\ t = \overline{1,T} \\ \tilde{x}(0) = (0, 0, \xi(0), 0) \text{ - задано} \end{cases} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A-E & 0 & D & c \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -E & 0 \\ p & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $\tilde{x} = (x, \xi, \eta, L)$, $\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$

В (*) равновес. траектория опред-ея:

$\alpha = \lambda^{-1}$ и (x, ξ, η, L): $x(t) = \lambda^{-1} x$, $\xi(t) = \lambda^{-1}\xi$, $\eta(t) = \lambda^{-1}\eta$, $L(t) = \lambda^{-1} L$

Подстав. их в (*) получим:

$Ax + D\eta + Lc \le x$, $x \le \lambda\xi$, $\xi \le \lambda\xi + \eta$

$\langle l, x\rangle \le L$, $(x, \xi, \eta, L) \ge 0$

Будем предполагать вып-ние след. огр.:

1) A - неотр. матр. и неразлож.

2) $l > 0$, $c \ge 0$, $c \ne 0$

3) $A + R$ - продуктивна

4) $D \ge 0$ и из $\eta \ge 0$, $D\eta = 0 \Rightarrow D = 0$

<u>Теорема</u>

При вып-нии 1)-4) в динамич. модели межотр. баланса $\exists$ сост. равновесия с темпом роста $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}^{-1}$, которому соотв. един. луч. Неймана $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{L})$, причем

$\bar{\lambda}$ - число Фробен. матр. $Q(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}(A+R) + (1-\bar{\lambda})D$

$\bar{x}$ - правый вектор Фробен. $Q(\bar{\lambda})$

$\bar{\xi} = \bar{\lambda}^{-1}\bar{x}$, $\bar{\eta} = \bar{\lambda}^{-1}(1-\bar{\lambda})\bar{x}$, $\bar{L} = \langle l, \bar{x}\rangle$

• потреб. сектор ...

Билет 7

Модель Вальраса:

2 сектора: производители и потреб.

потребители – l производители (m)

продукты, ресурсы } товары – n

Потребитель i: $K_i(p)$ – ф. дохода

$\Phi_i(p)$ – ф. спроса

$$k_i(p) = \underbrace{\langle b_i, p\rangle}_{\text{продажа нач. запаса товаров } b_i} + \underbrace{I_i(p)}_{\text{доп. доход}}$$

Производитель k: $(x, y) \in \Gamma$ – производ. процесс

$\langle y - x, p\rangle$ – прибыль от произв. процесса $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \underbrace{y - x}_{\text{чистый выпуск}}, p\rangle = \max_{(x', y') \in \Gamma} \langle y' - x', p\rangle$$

$y^k = F(x^k)$ – объем произв-ва

$Y^k = \{y^k - x^k \mid x^k \in \mathbb{R}^n_+,\ y^k = F(x^k)\}$ – технолог. мн-во, компакт

Ψ_k – ф. предложения (оптим. произв. проц.) $\Psi(p)$

$\Psi(p) = \{y \in Y \mid \langle y, p\rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p\rangle$

$Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ – совокупное технолог. мн-во

$\Psi_0(p) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p)$ – совокупное предложение

$\overline{\Psi}_0(p) = \{y \in Y \mid \langle y, p\rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p\rangle\}$ – мн-во произв. процессов, оптим. с точки зрения всего произв. сектора

Тогда произв. проц. оптим. с т. зрения всего произв. сектора, оптимальны и с т. зрения каждого произ-ля, и наоборот:

$$\overline{\Psi}_0(p) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p) = \Psi_0(p)$$

Опр. Набор $(y_1^* \dots y_m^*, x_1^* \dots x_l^*, p^*)$ наз. конкур. равновес, если $y_k^* \in \Psi_k(p^*)$, $k = \overline{1,m}$; $x_i \in \Phi_i(p^*)$, $i = \overline{1,l}$ кроме того $\underbrace{\sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i}_{\text{предложение}} \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{l} x_i^*}_{\text{спрос}}$

$$\underbrace{\left\langle p^*, \sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle}_{\text{стоимость купленного}} = \underbrace{\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle}_{\text{стоимость проданного}}$$

Опр. Вектор p^* наз. вектором равновес. цен,
Отобр. $\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ - ф. совокуп. спроса
Отобр. $\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p)$ - ф. совокуп. предлож., $b = \sum_{i=1}^{l} b_i$

Теорема (з. Вальраса в широком смысле)

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, y \rangle, \quad x \in \Phi(p),\ y \in \Psi(p)$$

Опр. Набор (y^*, x^*, p^*) наз. конкур. равновес. если $x^* \in \Phi(p^*)$, $y^* \in \Psi(p^*)$, $x^* \leq y^*$ и $\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$

Модель динам. равн (обобщ. м. Вальраса).

n типов товаров
время: периоды $[0,1], [1,2] \dots [t, t+1]$
Число периодов T конечно и бесконечно

Производство: $Z_t \subset \mathbb{R}_+^{2n}$ - технолог. мн-во (все произв. воз-ти в $[t, t+1]$)

$$(\underset{\text{мат. затраты}}{x}, \underset{\text{вектор выпуск. продуктов}}{y}) \in Z_t \text{ - технолог. процесс}$$

Потребление: $\Phi_t : \mathbb{R}_+^n \to 2^{\mathbb{R}_+^n}$ - ф. совокупного спроса, ставит в соотв. каждому вектору цен $p_t \in \mathbb{R}_+^n$ $[t, t+1]$ мн-во $\Phi_i(p_i) \in \mathbb{R}_+^n$.

x произв затрат приобр. по p_t в $[t, t+1]$, а произв. продукция по p_{t+1} в след. период $t+1$
Тогда прибыль $\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle$.

В соотв. с концепцией общего равновесия: каждый участник действ. согласно собств. интересам ориентир. только на цены текущ. периода:

Билет 14 (продолжение)

- потреб. сектор формир спрос $c_t \in \Phi_t(p_t)$
- произв. сектор в $[t, t+1]$ решает з. мах. прибыли:

$$\max(\langle p_{t+1}, y\rangle - \langle p_t, x\rangle).$$

одно из решений (x_t, y_{t+1}) в итоге реализ-ся

Опр. $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}$, $t=\overline{0,T}$ наз. (конечн.) равновес. траекторией с начало y_0, если:

1) $c_t \in \Phi_t(p_t)$.
2) $(x_t, y_{t+1}) \in Z_t$
3) $\langle p_{t+1}, y_{t+1}\rangle - \langle p_t, x_t\rangle \geq \langle p_{t+1}, y'_{t+1}\rangle - \langle p_t, x'_t\rangle, \forall (x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$
4) $c_t \leq y_t - x_t$
5) $\langle p_t, c_t\rangle = \langle p_t, y_t - x_t\rangle$
6) $\langle p_T, x_T\rangle = 0$

3) $\Longleftrightarrow \forall t_1, t_2 \in T$, $0 \leq t_1 \leq t_2 < T: \sum\limits_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y_t - x_t\rangle \geq \sum\limits_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y'_t - x'_t\rangle$
$\forall (x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = \overline{t_1, t_2 - 1}$. $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$

При $t_1 = 0$ и $t_2 = T$, получаем, что (x_t, y_t), $t=\overline{0,T}$ явл. реш. з. $\max\limits_{(x'_t, y'_t) \in Z_t} \sum\limits_{t=0}^{T} \langle p_t, y'_t - x'_t\rangle$ при $y'_0 = y_0$

Сделаем след. предполож.

1) $\Phi_t(p)$ опр-ны $\forall p \in \mathbb{R}^n_+$ и полунепр. сверху;
   $\forall p$ $\Phi_t(p)$ выпуклы, $\Phi_t(p)$ огр. в совокупности
2) $\exists \beta > 0: \langle p, c\rangle \leq \beta$ $\forall p$. $c \in \Phi_t(p)$
3) Z_t - замкн. выпуклы $(0,0) \in Z_t$
   Z_t - огр. в совокупности
4) $\exists (\tilde{x}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Z_t, t = \overline{0,T}: \tilde{y}_t - x_t \geq \tilde{\xi} > 0$, $\tilde{\xi}$ - фиксир.
5) $y_0 > 0$

Теорема

При вып. усл. 1) - 5) для $\forall T < \infty$ $\exists$ равновес. траектория с началом y_0

Теорема

При вып. усл. 1) - 5) $\exists$ бескон. равновеск. траектории для $\forall y_0 < 0$

эффективность траектории:

$$\sum_{t=0}^{r} \langle p_t^*, c_t^* - c_t \rangle \geq 0 \quad \forall (c_t, x_t, y_t)$$

$$r : r \geq \hat{t}$$

Билет 8

Ур. модели:

$$\begin{cases} Y(t) = c(t) + I(t), \quad c(t) \geq 0, I(t) \geq 0 \\ Y(t) = M(t) f\left(\frac{L(t)}{M(t)}\right) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\mu M(t) + \frac{I(t)}{b} \\ \frac{dN(t)}{dt} = nL(t) \to L(t) = L_0 e^{nt} \\ s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} \\ c(t) = (1 - s(t))Y(t) \\ M(0) = M_0; \ L(0) = L_0 \end{cases}$$

где $Y(t)$ - ВВП, $c(t)$ - потребление, $I(t)$ - инвестиции, $M(t)$ - производ. мощности, μ - темп амортизации, b - природная фондоемкость. $N(t)$ - кол-во раб. силы $s(t)$ - норма накопления

Если $\{L(t), M(t), Y(t), I(t), c(t)\}$ - решение системы, и $\forall k \geq 0 \ \{kL(t), kM(t), kY(t), kI(t), kc(t)\}$ - тоже решение, то система однородна.

$N(t) = N_0 e^{\gamma t}$, $M(t) = M_0 e^{\gamma t}$, $Y(t) = Y_0 e^{\gamma t}$, $I(t) = I_0 e^{\gamma t}$, $c(t) = c_0 e^{\gamma t}$ - режим сбалансированного роста, где γ - скорость роста.

Подставив их в систему ур. получим:

$$\gamma M_0 = \frac{I_0}{b} - \mu M_0; \ Y_0 = M_0 f(x_0); \ N_0 = x_0 M_0; \ Y_0 = I_0 + c_0; \ \gamma N_0 = n N_0$$

с 7-ю неизвестными вел-нами: $\gamma, N_0, M_0, x_0 = \frac{N_0}{M_0}, Y_0, I_0, c_0$

После преобраз. получим след:

$$\gamma = n, \ I_0 = b(\mu + n) M_0, \ N_0 = x_0 M_0, \ Y_0 = M_0 f(x_0), \ c_0 = N_0 \frac{f(x_0) - b(\mu + n)}{x_0}$$

$$s = \frac{I(t)}{Y(t)} = \frac{b(\mu+n)}{f(x_0)}$$

Потребление на душу населения: $y(x_0) = \frac{c(t)}{N(t)} = \frac{f(x_0) - b(\mu+n)}{x_0}$,

усл. макс. ф-ции: $f(x^*) - x^* f'(x^*) = b(n+\mu)$ (берем произ. по x_0)

Т.к. $f(x) \leq 1$, то экономика будет продуктивной, если $b(\mu+n) < 1$

$$y(x_0) = \frac{1 - b(n+\mu)}{x_0} > 0 \text{ при } x_0 \to \infty \text{ и } b(n+\mu) < 1$$

$$y(x_0) = \frac{b(n+\mu)}{x_0} < 0 \text{ при } x_0 \to 0$$

поэтому максимум потреб. на душу населения достигается при конечном значение $x_0 = x^*$

Из необх. усл. так находим. ур.-, опр-щее x^*:

$f(x^*) - x^* f'(x^*) = b(n+\mu)$ - правило Солоу $\qquad (*)$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{k(t)}{b} f\left(\frac{b}{k(t)}\right) = \bar f(k(t))$$

$k = \frac{k}{N} = \frac{b}{x}$ - фондовооруженность труда, $\bar f(k) = \frac{M}{N} f\left(\frac{N}{M}\right) = \frac{f(x)}{x}$ - средняя произ-ть труда

Тогда $dk = -\frac{b}{x^2}dx$ $\quad \bar f'(k)dk = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}dx$ откуда получаем

$$\bar f'(k) = \frac{f(x) - f'(x)x}{b}.$$

Тогда из $(*) \Rightarrow \bar f'(k^*) = n+\mu$ - правило Солоу

Динамич. оптимальность!

С учетом нач. системы необх. найти так ф-ла $\langle y\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{c(t)}{N(t)}dt$

В качестве фазовой перем. берем $k(t) = \frac{bM(t)}{N(t)}$, а в качестве упр. воздействия $s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)}$, с учетом $Y(t) = N(t)\bar f(k(t))$.

Тогда $k' = \frac{bM'N - bMN'}{N^2} = \frac{bM'}{N} - \frac{bMN'}{N^2} = k\left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N}\right) = k\left(\frac{I}{bM} - (n+\mu)\right) =$

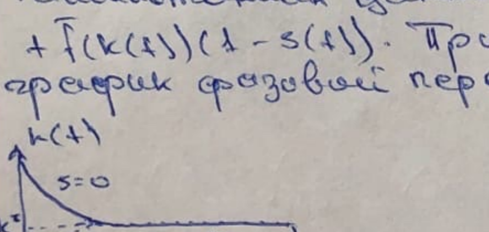
$= k\left(\frac{sY}{bM} - (n+\mu)\right) = k\left(\frac{sN\bar f(k)}{bM} - (n+\mu)\right) = s(t)\bar f(k(t)) - (n+\mu)k(t)$

$c(t) = Y(t) - I(t) = Y(t)(1-s(t)) = N(t)\bar f(k(t))(1-s(t))$

Переходим к след. з. опт-ции:

$$\begin{cases} \int_0^T \bar f(k(t))(1-s(t))dt \to \max \\ s(t) \in [0,1] \\ k(0) = \frac{M_0 b}{N_0} \\ \frac{dk}{dt} = s(t)\bar f(k(t)) - (n+\mu)k(t) \end{cases}$$

Гамильтониан данной системы: $H(k,q,s) = q(s(t)\bar f(k(t)) - (n+\mu)k(t)) + \bar f(k(t))(1-s(t))$. При дост. большом гор-те планир. график фазовой перем. имеет след. вид:



Магистр. св-во сбаланс. роста: если при фик. нач. усл. k_0 увел. горизонт планирования T, то все большая часть оптим. траектории будет совпадать со сбаланс. ростом а значение ф-ла на оптим. траектории будет приближаться к значению душевого потребления на оптим. сбаланс. росте. Это явление - слабая зависимость оптимальных траекторий от нач. усл. (а фактически и от конкретного вида ф-ла) при больших горизонтах планирования наз. магистральным св-вом

Билет 9

Рассмотрим динамич. вариант модели Неймана
Пусть A (матр. затрат) и B (матр. выпуска) постоянны, x (вектор интен-ти) меняется со временем. Пусть также
1) экономика функционирует в течение T периодов времени
2) в каждый период $[t-1, t]$ для произ-ва примен. один из процессов мн-ва $c = \{(y,z) \mid \exists x \geq 0 : y = Ax, z = Bx\}$ хар-ся вектором $x(t)$
3) на произ-во в период $[t, t+1]$ могут быть потребены только те продукты, которые были произ-ны в $[t-1, t]$ (модель явл. замкнутой) т.е. $Ax(t) \leq Bx(t-1)$ (*)

Опр. Посл-ть $x(1), x(2) \dots x(T) \overset{def}{=} \{x(T)\}$, удовл. (*) наз. планом
Предположим, что все товары имеют цены, измен. от периода к периоду: $p^i(t-1)$ - цена единицы продукции в период $[t-1, t]$, $p(t-1) = (p^1(t-1) \dots p^n(t-1))$, $p(t-1) \geq 0$. Тогда доход произв. процесса (a^i, b^i) в $[t-1, t]$ равен $\langle p(t), b^i\rangle - \langle p(t-1), a^i\rangle$
Поскольку система замкнута $\Rightarrow$ вып. усл. сохр. денеж. масс $\Rightarrow$
$\Rightarrow p(t-1)A \geq p(t)B$ или в явном виде: $\begin{cases} p(t-1)Ax(t) = p(t)Bx(t), \\ p(t)Bx(t+1) = p(t)Ax(t), \end{cases} t = \overline{1, T}$

Опр. Траектория $\{x(t)\}$ наз. стац. если $\exists \, \nu > 0 : x(t) = \nu x(t-1)$
$(x(t) = \nu^t x(0))$

Утв $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ явл. стац. в м. Неймана $\Leftrightarrow \nu Ax \leq Bx$

Утв $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ явл. стац. в м. Неймана $\Leftrightarrow \mu pA \leq pB$

Для стац. траекторий $\{x(t)\}$ и $\{p(t)\}$ усл. неизмен. денеж. массы, соотв. имеет вид: $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$

Опр. м. Неймана находится в сост. динам. равновесия, опис. (ν, μ, x, p), если $\nu Ax \leq Bx$, $\mu pA \geq pB$, $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$, где $\nu, \mu > 0$, а x и p - неотр. векторы
Из опр. $\Rightarrow \nu = \mu \overset{def}{=} \alpha$.

Опр. Невырожд. положе. равновес. в м. Неймана наз. тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$ $x \in \mathbb{R}^m_+$ $p \in \mathbb{R}^n_+$ удовл. соотношениям:
$\alpha Ax \leq Bx \qquad \alpha pA \geq pB \qquad pAx > 0$ (1)

Опр. Луч $\{y \mid \exists \mu \geq 0, y = \mu x\}$ где x участвует в невырожд. полож. равновесия наз. лучом Неймана

Теорема Пусть в м. Неймана $A \geq 0$ $B \geq 0$ и в A нет нулевых столбцов; а в B - нулевых строк. Тогда $\exists$ реш. (1).

Док-во: Рассм. з. мин. прогр. ~~...~~ ...

$$\begin{cases} \min u \\ (A-\lambda B)x - ue^n \le 0 \\ \langle x, e^m\rangle = 1,\ x \ge 0 \end{cases} \quad (2)$$

λ - числ. параметр, x, u - перемен.
e^n - n-мерный един. вектор
e^m - m-мерный един. вектор

Ф-ция $u(\lambda)$, являющаяся знач. з. (2) в зависимости от λ облад. след. св-вами:

1) $u(\lambda)$ непр. на всей числ. оси
2) $u(0) > 0$
3) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} u(\lambda) = -\infty$
4) $u(\lambda)$ монот. убыв.

$\Rightarrow \exists \bar\lambda > 0 : u(\bar\lambda) = 0$ ~~очевидно~~.

Обозн. через $\bar x$ соотв. реш. з. (2). Тогда $A\bar x \le \bar\lambda B \bar x$, $\bar x \ge 0$

Рассм. двойств. з. к з. (2):

$$\begin{cases} \max \vartheta \\ p(A-\lambda B) - \vartheta e^n \ge 0 \\ \langle p, e^m\rangle = 1,\ p \ge 0 \end{cases} \quad (3)$$

По теореме о двойст-ти: $\vartheta(\bar\lambda) = 0$.

Обозн. через $\bar p$ соотв. реш. з. (3). Тогда $\bar p A \ge \bar\lambda \bar p B$, $\bar p \ge 0$.

Таким образом $(\bar\lambda^{-1}, \bar x, \bar p)$ явл. положением равновесия в м. Неймана.

Док-во невырожд-ти. Рассм. мн-во реш. ур. $u(\lambda) = 0$. Из св-в. ф. $u(\lambda) \Rightarrow$ мн-во реш. явл. $[\lambda_0, \lambda_1]$, $\lambda_0 > 0$.

Покажем, что $\exists$ невырожд. равновес. соотв. числу $\alpha = \lambda_1^{-1}$ среди всех реш. $\bar p$ з. (3) выберем p^*, для которого вектор $p^* A$ облад. наиб. кол-вом полож. компонент. Теперь покажем, что $\exists x^*$, который образ. вместе с указ. α и p^* невырожд. полож. равновес. Допустим противное.

Тогда из $(A - \lambda_1 B)x \le 0$, $x \ge 0 \Rightarrow p^* A x \le 0$. По теор. о лин. нер-вах $\Rightarrow \exists$ неотр. вектор $q : q(A-\lambda_1 B) \ge p^* A$.

Вектор q имеет св-ва:

$(qA)_j > \lambda_1 (qB)_j$, $j \notin \{j \mid (pA)_j = 0\}$
$(qA)_j = \lambda_1 (qB)_j$, $j \in \{j \mid (pA)_j = 0\}$

$\Rightarrow \exists \Delta > 0 : qA \ge (\lambda_1 + \Delta) B$, т.е. $(q, 0)$ допустим для (3) при $\lambda = \lambda_1 + \Delta \Rightarrow u(\lambda_1 + \Delta) = \vartheta(\lambda_1 + \Delta) \ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречие (св. ф. $u(\lambda)$ и так λ_1)

Тем самым показано, что λ_1 отвечает невырожд. полож. равновес $(\lambda_1^{-1}, x^*, p^*)$.

<u>Теорема</u> Тройка (α, x, p) явл. полож. равновес (м.б. вырожд.) в м. Неймана $\Leftrightarrow u(\alpha^{-1}) = 0$, а $(x, 0)$ и $(p, 0)$ явл. реш. з. (2) и (3) при $\lambda = \alpha^{-1}$.

<u>Опр.</u> Число α наз. темпом роста

<u>Опр.</u> Число λ_0 наз. числом Неймана, число λ_1 - числом Фробениуса в м. Неймана (A, B)

Билет 9 (продолжение)

Числа $\alpha = \lambda_0^{-1}$ и $\beta = \lambda_1^{-1}$ опред. соотв. max и min возможные темпы роста по стац. траектории

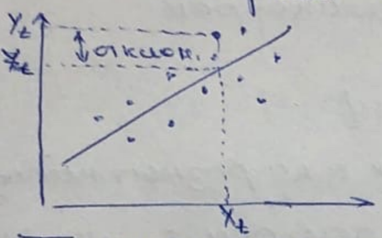
Опр. м. Неймана (A, B) продуктивна, если $\begin{cases} Bx - Ax \geq c \\ x \geq 0 \end{cases}$ имеет реш. $\forall c \geq 0$

Теорема м. Неймана продуктивна $\Leftrightarrow$ число Фробениуса < 1

Билет 10 (вроде норм)

нужно ли док-во теоремы?

1. Рассмотрим набор двух перемен. X_t, Y_t, $t = \overline{1,n}$.



Можно отобр. (X_t, Y_t) точками на пл-ти.

Задача: подбор $Y = f(X)$ из парам. семейства ф-ций $f(X, \beta)$, наилучшим образом опис. зависимость Y от X.

Подобр. ф. означ. выбрать β.

Пример парам. семейства: $f(X, \beta) = \alpha + \beta X$. ← модель парной лин. регрессии.

В качестве меры отклон. можно взять:

1. $F = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - f(X_t, \beta))^2$ — сумма квадр. отклон.
2. $F = \sum_{t=1}^{n} |Y_t - f(X_t, \beta)|$ — сумма модулей отклон.
3. $F = \sum_{t=1}^{n} g(Y_t - f(X_t, \beta))$

2. Метод наим. квадратов (МНК)

В МНК рассматр-ся функционал: $F = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - (a + bX_t))^2$, который необх. минимиз. для наилучшей аппрокс. набора наблюдений X_t, Y_t, $t = \overline{1,n}$ лин. ф-ции $f(X) = a + bX$

Найдя экстремумы по a и b ф-ла F ($\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$), получим требуемые оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ для $f(X)$:

$$\hat{b} = \frac{n \sum X_t Y_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\operatorname{Var}(X)}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum Y_t - \frac{1}{n} \sum X_t \hat{b} = \overline{Y} - \overline{X} \hat{b}$$

выборочн. среднее

Ур. в отклонениях:

Пусть $x_t = X_t - \overline{X}$, $y_t = Y_t - \overline{Y}$.

Задача: Подобр. лин. ф. $f(x) = a + bx$ минимизир. функционал $F = \sum_{t=1}^{n} (y_t - (a + bx_t))^2$.

Решением будет та же прямая на плоскости (x, y), что и для исходных данных X_t, Y_t, т.к. переход к отклон. означает лишь перенос коорд в точку $(\overline{X}, \overline{Y})$

$$\hat{a} = 0, \quad \hat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X_t - \overline{X})^2}$$

Основные гипотезы:

1. $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t$, $t = \overline{1,n}$ — спецификация модели

2. X_t — детермин. вел-на; вектор $(X_1 \dots X_n)'$ неколлинеарен вектору $i = (1 \dots 1)'$

3a. $E\varepsilon_t = 0$, $E(\varepsilon_t^2)^2 = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не завис. от t

3b. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, неколлинеар. ошибок для разных наблюд

3c. Ошибки ε_t, $t = \overline{1,n}$ имеют совместн. норм. распред: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Опр. Усл. независ-ти дисперсии ошибок от номера наблюдения (от X_t): $E(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$; $t = \overline{1,n}$ наз. гомоскедастич. случай когда усл. гомоскедаст. не вып-ея наз. гетероскедастич.

Теорема Гаусса-Маркова

В предположениях модели 1-3ab оценки $\hat{a}, \hat{b}$ полученные по МНК, имеют наим. дисперсию в классе всех лин. несмещенных оценок

Пусть $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ — прогноз Y_t в точке X_t

Остатки регрессии e_t опред-ея из ур: $Y_t = \hat{Y}_t + e_t = \hat{a} + \hat{b}X_t + e_t$

e_t — сл. вел-на.

Несмещ. оценка дисп. ошибок:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2$$

Оценка дисперсий $\hat{a}, \hat{b}$:

$$Var(\hat{b}) = s^2 \frac{1}{\sum x_t^2} = \frac{s^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2}$$

$$Var(\hat{a}) = s^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2} = \frac{s^2 \sum X_t^2}{n \sum (X_t - \overline{X})^2}$$

$$cov(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{\overline{X}}{\sum x_t^2} s^2 = -\frac{\overline{X} s^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2}$$

Билет 11 (нужно ли док-во?)

Модель множественной регрессии:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,n}$$

или

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,n}$$

где x_{tp} - значение регрессора x_p в набл. t, а $x_{t1} = 1$, $t = \overline{1,n}$

Осн. гипотезы:

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$; $t = \overline{1,n}$ - специфик. модели
2. $x_{t1} \ldots x_{tk}$ - детермин. вел-ны. Векторы $x_s = (x_{1s} \ldots x_{ns})'$, $s = \overline{1,k}$ лин независ в $\mathbb{R}^n$

3a. $E\varepsilon_t = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - независ. от t

3b. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ - статистич. независ. (некоррелир.) ошибок для разных наблюдений

3c. Ошибки ε_t, $t = \overline{1,n}$ имеют совместн. норм. распр.: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

В этом сл. модель наз. нормальной мн. регрессионной

Матричный вид:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Тогда усл 1) - 3) имеют вид:

1. $y = X\beta + \varepsilon$
2. X - детермин. матр, $\mathrm{rank}(X) = k$

3a,b. $E(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$

3c. $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$

матрица ковариаций

2. Метод наим. квадратов (МНК)

Цель метода: выбор вектора оценок $\hat{\beta}$, таких, что

$$ESS = \sum e_t^2 = e^T e \to \min$$

где $e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$ - вектор остатков

Выражая $e^T e$ через X и β и $\frac{\partial ESS}{\partial \hat{\beta}} = 0$ получаем:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T y \text{ , } (X^T X) \text{ - обратима}$$

Теорема Гаусса-Маркова

Предположим, что усл. 1) - 3a,b) вып-ны. Тогда оценка МНК $\hat{\beta}_{OLS}$ явл. наиболее эффективной (в смысле наим. дисперсии) оценкой в классе лин. (по y) несмещенных оценок

Билет 12 не могу сказать, что не так, но что-то не так с ним

Пусть $t_1 \dots t_m \dots (t_i \le t_{i+1}\ \forall i)$ - дискр. моменты времени.
Пусть $X_{t_1} \dots X_{t_m} \dots$ сл. вел-ны, соотв. этим моментам времени.

Опр.1 Посл-ть $X_{t_1} \dots X_{t_m} \dots$ наз-ся временным рядом

$F(x_{t_1} \dots x_{t_n}) = P\{X_{t_1} < x_{t_1} \dots X_{t_n} < x_{t_n}\}$ - совместн. ф. распр. вел-н $X_{t_1} \dots X_{t_n}$.

$p(x_{t_1} \dots x_{t_n})$ - совместная пл-ть распр. вел-н $X_{t_1} \dots X_{t_n}$

Опр.2 Ряд X_t наз. строго стац. или стац. в узком смысле, если совместное распр. m наблюдений $X_{t_1} \dots X_{t_m}$ не зависит от сдвига по времени. т.е. совпад. с распред. $X_{t_1+\tau} \dots X_{t_m+\tau}$
(т.е. $p(x_{t_1} \dots x_{t_n}) = p(x_{t_1+\tau} \dots x_{t_m+\tau})\ \forall m, \tau, t_1 \dots t_m$

Опр.3 Ряд X_t наз. слабо стац. или стац. в широком смысле, если среднее, дисперсия и ковариация X_t не завис. от t:

$$E(X_t) = \mu < \infty,\ Var(X_t) = \gamma(0),\ Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$$

Из строгой стац. $\Rightarrow$ слабая стац.

$\rho(\tau) = corr(X_t, X_{t+\tau}) = \dfrac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ - коэф. корреляции
$\rho(\tau) = \rho(-\tau),\ \rho(0) = 1$

Примеры:

1. Гаус. процесс: $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, $t = \overline{1,n}$, $\rho(\tau) = 0\ \forall \tau \ne 0$. стационарен. в шир. смысле
2. Процесс "белого шума": $E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\rho(\tau) = 0\ \forall \tau \ne 0$. стац. (слабая)
3. Гаус. процесс "белого шума": $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t = \overline{1,n}$ $\rho(\tau) = 0\ \forall \tau \ne 0$ стац. (слабая)
4. Процесс $AR(1)$: $X_t = a X_{t-1} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{белый шум}}$, $a \ne 0$
Стац. в широком смысле при $|a| < 1$

Билет 13 и 14 надо бы разделить эти два билета

Рассмотрим нестац. ряд сл. блуждания: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$.
При взятии 1ой раз-ти: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ получ. стац.ряд: $\Delta X_t = Y_t = \varepsilon_t$

Рассмотрим ряд: $X_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$. Тогда

$$\Delta X_t = b + 2ct - c + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$\Delta^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = 2c + (\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})$$ — стац. ряд

Бокс и Дженкинс выделили класс нестац. рядов ARIMA(p,d,q), который взятием d посл-тельных разностей приводится к стац. (p-параметр AR-части, d-степень интеграции, q - параметр MA-части) ARIMA явл. расшир. моделей ARMA. В операторном виде ARIMA записывается:

$$a_p(L)(1-L)^d X_t = b_q(L)\varepsilon_t \quad \text{или} \quad a_p(L)\Delta^d X_t = b_q(L)\varepsilon_t$$

Если обозн. $a_p(L)(1-L)^d X_t = Y_t$ получим стац. процесс.

4 этапа построения ARIMA:

1. Установить порядок интеграции d. После получ. времен. ряд, к которому нужно подобрать ARMA(p,q), исходя из автокорреляционной и частной автокорреляц. ф-ции;
2. Оценивание $a_1 \dots a_p$, $b_1 \dots b_q$ при усл., что известны p и q;
3. По остаткам осуществл. тестир. (диагност. модели)
4. Использование модели для прогнозир. знач. времен. ряда

Опр. Авторегрессионая модель AR(p):

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \ a_p \neq 0$$

Опр. Модель скользящего среднего MA(q):

$$X_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}, \ b_q \neq 0$$

Опр. Модель ARMA(p, q):

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}$$

Опр. Автокорреляцией наз. ...

Билет 15 (нужны ли док-ва?) нужно ли опр. лин норм. регрес модели?

Пусть вып. усл. норм. лин. регрес. модели $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, или, что тоже самое, Y_t имеют совместн. норм. распр.
Тогда МНК-оценки $\hat{a}, \hat{b}$ также имеют совместное норм. распред:

$$\hat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \hat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right) \qquad (1)$$

где $\sum x_t^2 = \sum X_t^2 - n\bar{X}^2$

Если гипотеза норм-ти ошибок не вып-ся, то (1) неверно. Однако при некотор. усл. рег-ти на поведение X_t при росте n оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ имеют асимптотич. норм. распред., т.е. (1) вып-ся асимптотически при $n \to \infty$

Распред. оценки дисперсии ошибок: $\hat{\sigma}^2 = s^2$
В сл. норм. лин. регрес. модели ($\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$) вып-ся

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

Оценка дисперсии ошибок $\hat{\sigma}^2 = s^2$ и МНК-оценки $\hat{a}, \hat{b}$ независ., т.к.

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2, \quad e_t = Y_t - \hat{Y}_t, \text{ и } \begin{cases} cov(e_t, \hat{b}) = 0 \\ cov(e_t, \hat{a}) = 0 \end{cases}$$

Билет 16 (вроде пойдет) нужна ли модель лин. регрессии?

Проверка гипотезы $H_0: b = b_0$

МНК-оценки:

$$\hat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right) \quad \hat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right) \qquad (1)$$

из. (1) $\Rightarrow \hat{b} - b \sim N(0, \sigma_{\hat{b}}^2)$, где $\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$.

Оценка дисперсии: $Var(\hat{b}) = s_{\hat{b}}^2 = \frac{s^2}{\sum x_t^2}$

Тогда $\frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}} \sim N(0, 1)$.

Учитывая, что $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$, получим

$$\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2}\chi^2(n-2)} \Rightarrow \{\text{по опр. статист. Стьюдента}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{(\hat{b} - b)/\sigma_{\hat{b}}}{s/\sigma} \sim t(n-2).$$

Т.к. $\frac{\sigma_{\hat{b}}}{\sigma} = \frac{s_{\hat{b}}}{s}$ получим $t = \frac{\hat{b} - b}{s_{\hat{b}}} \sim t(n-2)$ $\qquad (*)$

Аналогично показывается, что $t = \frac{\hat{a} - a}{s_{\hat{a}}} \sim t(n-2)$

Статистику $(*)$ можно исп. для проверки $H_0: b = b_0$ против альтернативной гипотезы $H_1: b \neq b_0$.

Пусть H_0 верна. Тогда $t = \frac{\hat{b} - b_0}{s_{\hat{b}}} \sim t(n-2)$

Гипотеза H_0 принимается при $|t| \leq t_\alpha(n-2)$

Другими словами,

$$P\left(-t_\alpha(n-2) < \frac{\hat{b} - b_0}{s_{\hat{b}}} < t_\alpha(n-2)\right) = 1 - \alpha$$

$100(1-\alpha)\%$-ый доверит. интервал для b равен:

$$[\hat{b} - t_c s_{\hat{b}}, \; \hat{b} + t_c s_{\hat{b}}]$$

где t_c - точка t-распред. с $(n-2)$ степ. свободы при уровне знач. α

Коэф. детерминации R^2.

Рассмотрим вариацию $\sum (Y_t - \bar{Y})^2$ знач. Y_t вокруг среднего знач.

Разобьем вариацию на две части: объясненную и не объясненную

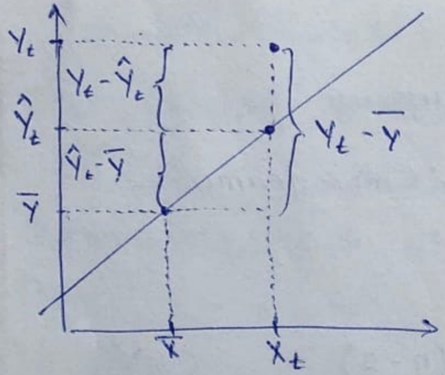
Пусть $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ - предсказ. знач. Y_t.

Тогда $Y_t - \bar{Y} = (Y_t - \hat{Y}_t) + (\hat{Y}_t - \bar{Y})$ и вариация Y_t запис. в виде:

$$\underbrace{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}_{TSS} = \underbrace{\sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2}_{ESS} + \underbrace{\sum (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}_{RSS} + 2\sum (Y_t - \hat{Y}_t)(\hat{Y}_t - \bar{Y})$$

Третье слаг. $= 0$, т.к.

$$\sum e_t(\hat{Y}_t - \bar{Y}) = \sum e_t(\hat{a} + \hat{b}X_t - \bar{Y}) = \{x_t = X_t - \bar{X}\} =$$
$$= (\hat{a} + \hat{b}\bar{X} - \bar{Y})\sum e_t + \hat{b}\sum e_t x_t = 0$$



<u>Опр</u>: коэф. детерминации наз.

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}, \quad R^2 \in [\underset{\text{регр. ничего не дает}}{0}, \underset{\text{точная подгонка}}{1}]$$

Билет № 7

(нужно ли модель множ регр. ?)

Стат. св-ва МНК-оценок

Введем вектор прогноз. значений:

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X^TX)^{-1}X^Ty$$

Введем вектор остатков регр.:

$$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} = (I - X(X^TX)^{-1}X^T)y = My, \quad M = (I - \underbrace{X(X^TX)^{-1}X^T}_{=N})$$

Вычисл. мат ожид и матр. ковар. e:

$$E(e) = (I - X(X^TX)^{-1}X^T)E(y) = (I - X(X^TX)^{-1}X^T)X\beta = X\beta - X\beta = 0$$

$$Var(e) = Var(My) = MVar(y)M^T = M\sigma^2 IM^T = \sigma^2 M$$

Оценка дисперсии ошибок:

$$E(e^Te) = tr(Var(e)) = \sigma^2 tr(I_n - N) = (n-k)\sigma^2$$

Следовательно, $s^2 = \hat{\sigma}^2 = \dfrac{e^Te}{n-k} = \dfrac{\sum e_t^2}{n-k}$ – несмещ. оценка дисп. ошибок, т.е. $Es^2 = \sigma^2$

Распределение:

$$\frac{e^Te}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k) \quad \text{или} \quad (n-k)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

Оценки $\hat{\beta}$ и s^2 независимы в предполож. норм. лин. множеств. регрес. модели.

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X^TX)^{-1}X^T(X\beta + \varepsilon) = \beta + (X^TX)^{-1}X^T\varepsilon = \beta + A\varepsilon$$

Вектора $\hat{\beta}$ и e имеют совместн. многомерн. норм. распр. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нужно док-ть их некоррелир.

$$AM = (X^TX)^{-1}X^T(I - X(X^TX)^{-1}X^T) = 0$$

Тогда (т.к. $Ee = 0$)

$$cov(\hat{\beta}, e) = E((\hat{\beta} - \beta)e^T) = E(A\varepsilon\varepsilon^TM) = \sigma^2 AM = 0$$

Т.к. s^2 явл. ф. от e $\Rightarrow$ оценки $\hat{\beta}$ и s^2 независ.

Коэф-ты R^2 и R^2_{adj}

Разобьем вариацию $\sum(y_t - \bar{y})^2$ на 2 части: объясн. и не объясн. ∞)

$$\sum(y_t - \bar{y})^2 = \sum(y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2 + 2\sum(y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \bar{y})$$

Тоже самое в вектор. форме:

$$(y-\bar{y}_i)^T(y-\bar{y}_i) = (y-\hat{y})^T(y-\hat{y}) + (\hat{y}-\bar{y}_i)^T(\hat{y}-\bar{y}_i) +$$
$$+ 2(y-\hat{y})^T(y-\bar{y}_i)$$

Третье слаг. равно нулю:

$$(y-\hat{y})^T(\hat{y}-\bar{y}_i) = e^T(X\hat{\beta}-\bar{y}_i) = e^TX\hat{\beta} - \bar{y}e_i^T = 0$$

Поэтому

$$\underbrace{\|y-\bar{y}_i\|^2}_{TSS} = \underbrace{\|y-\hat{y}\|^2}_{ESS} + \underbrace{\|\hat{y}-\bar{y}_i\|^2}_{RSS} \qquad (*)$$

Запис. $(*)$ в отклон: $y_* = y - \bar{y}_i$, $\hat{y}_* = \hat{y} - \bar{y}_i$ получ.

$$y_*' y_* = e^T e + \hat{y}_*^T \hat{y}_*$$

Опр. коэф детерминации наз.

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{e^Te}{y_*^T y_*} = \frac{\hat{y}_*^T\hat{y}_*}{y_*^T y_*} \quad . R^2 \in [0,1]$$

св-ва:

1°. $R^2 \uparrow$ при добавл. регр.

2°. чувств. при измен. данных

Опр. Скорректированным R^2 наз.

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{e^Te/(n-k)}{y_*^T y_*/(n-1)}$$

св-ва:

1°. $R^2_{adj} = 1 - (1-R^2)\frac{(n-1)}{(n-k)}$

2°. $R^2 \geq R^2_{adj}$, $k > 1$

3°. $R^2_{adj} \leq 1$, но может быть < 0

Билет 18 (вообще ничего хорошего сказать не могу)

Гипотеза $H_0: H\beta = r$.

Пусть H - $q\times k$ матр., β - $k\times 1$ вектор коэф., r - $q\times 1$ вектор $q \le k$, $\mathrm{rank}(H) = q$

Рассмотрим $\hat{\beta}_{OLS} = (X^TX)^{-1}X^Ty$. $\hat{\beta}_{OLS}$ явл. несмещ. оценкой МНК с $E\hat{\beta}_{OLS} = \beta$ и $Var(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2(X^TX)^{-1}$

$\Rightarrow \hat{\beta}_{OLS} \sim N(\beta, \sigma^2(X^TX)^{-1}) \Rightarrow H\hat{\beta} - r \sim N(H\beta - r, \Sigma)$. (*)

где Σ матр $q\times q$ $= \sigma^2 H(X^TX)^{-1}H^T$.

При усл. ~~стр.~~ ~~...~~ спр-ти $H_0: H\beta = r$:

$$\frac{1}{\sigma^2}(H\hat{\beta} - r)^T(H(X^TX)^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{\beta} - r) \sim \chi^2(q)$$

Т.к. $\frac{e^Te}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ ~~...~~ и учитывая независ. $\hat{\beta}$ и e имеем:

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - r)^T(H(X^TX)^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{\beta} - r)/q}{e^Te/(n-k)} \sim F(q, n-k)$$

Если спр-ва гипотеза $H_0: H\beta - r = 0$, то F не должна приним. слишком больших знач., а именно, с вер-тью $1-\alpha$ имеем $F < F_\alpha(q, n-k)$, где $F_\alpha(q, n-k)$ - $100\alpha\%$-ная т. распред Фишера $F(q, n-k)$

Из $\frac{e^Te}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ и (*) используя независ $\hat{\beta}$ и e получаем

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)^T H^T(H(X^TX)^{-1}H^T)^{-1}H(\hat{\beta} - \beta)/q}{e^Te/(n-k)} \sim F(q, n-k)$$

Усл. $F < F_\alpha(q, n-k)$ задает $100(1-\alpha)\%$-ную доверит область для коэф. β

При $H = I$: $F = \dfrac{(\hat{\beta} - \beta)^T(X^TX)(\hat{\beta} - \beta)/k}{e^Te/(n-k)} \sim F(k, n-k)$

Билет 19 (явно нужно что-то добавить, но я не знаю что)

Авторегрессия порядка p:

$$AR(p): \; X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \; a_p \neq 0$$

параметры

белый шум

Пусть L - оператор лага: $L X_t = X_{t-1} \; \ldots \; L^p X_t = X_{t-p}$.

Тогда AR(p) можно переписать

$$a_1 X_{t-1} + \ldots + a_p X_{t-p} = \underbrace{(a_1 L + \ldots + a_p L^p)}_{1-a(L)} X_t \Rightarrow a(L) X_t = \varepsilon_t$$

Стац. завис. от корней $a(z) = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i z^i$. Для того, чтобы AR(p) был стац. дост. чтобы корни лежали вне ед. круга: $|z| > 1$.

Процесс скользящего среднего:

$$MA(q): X_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + b_q \varepsilon_{t-q}, \; b_q \neq 0$$

MA(q) стационарен при $\forall q$, т.к. явл частным сл. другого стац процесса $X_t = \mu + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + b_q \varepsilon_{t-q}$

$$E(X_t) = 0$$

$$Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{q} b_i^2$$

не точно

$$cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}\right) \sigma_\varepsilon^2, & 0 \le k \le q, \; b_0 = 1 \\ 0, & k > q \end{cases}$$

$$\rho(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}\right) / \sum_{j=0}^{q} b_j^2, & 0 \le k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

С помощью оператора лага L: $L X_t = X_{t-1}$. MA(q) можно переписать в виде:

$$X_t = b(L) \varepsilon_t, \text{ где } b(L) = 1 + b_1 L + \ldots + b_q L^q$$

Если корни $b(z)$: $|z| > 1$, то MA(q) обратима, т.е. $MA(q) \to AR(\infty)$

Авторегрессия скользящего среднего

ARMA(p,q): $X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}$, $b_0 = 1$, ε_t - белый шум

С помощью оператора лага L: $LX_t = X_{t-1}$ ARMA-модель можно представить в виде:

$$a(L)X_t = b(L)\varepsilon_t$$

где $a(L) = 1 - (a_1 L + \dots + a_p L^p)$

$b(L) = 1 + b_1 L + \dots + b_q L^q$

св-ва ARMA-модели:

1°. процесс стац. если корни $a(z) = 0$ лежат вне единич. круга

2°. если проц. стац., то $\exists$ MA(∞):

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j},\ c_0 = 1,\ \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$$

$$X_t - \mu = c(L)\varepsilon_x$$

$$c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \frac{b(z)}{a(z)}$$

3°. если корни $b(z)$ вне единич. круга, то $\exists$ представл. в виде AR(∞):

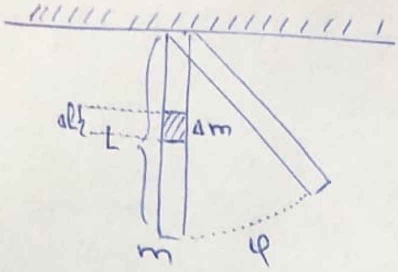
$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{\infty} d_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

$$d(L)(X_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$$d(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)}$$

нет док. стац!!!

Билет 20



Ур. Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \forall i = \overline{1,N}$

q_i - обобщенные координаты точек тела

$L(q, \dot{q}, t)$ - ф. Лагранжа

Разобьем стержень на малые части массой Δm длиной Δl, $\Delta m = \rho S \Delta l$. Тогда каждую часть можно представить как мат. маятник:

$$U = \Delta m g h = \Delta m g(l - l\cos\varphi) = \rho S \Delta l\, g(l - l\cos\varphi)$$

$$k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}, \quad v = l\cdot\dot{\varphi}$$

Ур. Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$, $L = k - U$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{\Delta m l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \rho S \Delta l\, g l(1 - \cos\varphi) =$$

$$= \rho S \Delta l\left(\frac{l^2\dot{\varphi}^2}{2} - \cancel{m} g l(1 - \cos\varphi)\right)$$

Чтобы получить ф. Лагранжа для целого стержня, интегрируем по всем частям стержня

$$L = \int_0^l \rho S\left(\frac{l^2\dot{\varphi}^2}{2} - gl(1 - \cos\varphi)\right)dl = \rho S\left(\frac{l^3\dot{\varphi}^2}{3\cdot 2} - \frac{gl^2}{2}(1 - \cos\varphi)\right) =$$

$$= \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{3\cdot 2} - \frac{mgl}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Подставляем это в ур. Лагранжа

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}\sin\varphi$$

$\Rightarrow$ ур. колебаний: $\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

$$\omega_0^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$ - частота колебаний

Билет 24 (что-то с ним не так)

Рассм. систему взаимод. мат. точек. Ф-ция Лагранжа такой системы ~~...~~ будет зависеть от скоростей и координат точек в пр-ве.
Т.к. система замкнута $\Rightarrow$ точки взаимод. друг с другом $\Rightarrow$ можем говорить об однородности и изотропности пр-ва и однородности времени ~~в ...~~ относ. всей системы в целом
Тогда

$$\underset{\text{ф-ция Лагранжа}}{L} = \underbrace{\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2}}_{\text{кинетич. энергия системы}} - \underset{\text{потенц. энергия системы}}{U_B(r_1 \dots r_N)}$$

Из однородности времени $\Rightarrow$ ф. Лагранжа замкн. системы не зависит явно от времени
Тогда полная произв-ная ф. Лагранжа по t имеет вид:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_a} v_a + \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial v_a} \dot{v}_a \qquad (*)$$

Ур. движ. замкнутой системы мат. точек:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a} - \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0, \quad a = \overline{1, N}$$

Выразим $\frac{\partial L}{\partial r_a}$ через $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a}$ и подставим в $(*)$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^{N} v_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a} + \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial v_a}\dot{v}_a = \sum_{a=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_a}; v_a\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial v_a}; \vec{v}_a \right\rangle \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{a=1}^{N} \left\langle \vec{v}_a, \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right\rangle - L\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a=1}^{N} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}, \vec{v}_a \right\rangle - L = const$$

$$\sum_{a=1}^{N} \langle m_a \vec{v}_a, \vec{v}_a \rangle \underbrace{- \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a v_a^2}{2} + U_B(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)}_{L} = const \leftarrow \text{энергия системы}$$

Билет 22

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f_1(t, x(t), y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = f_2(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Опр. Первым интегралом норм. системы (1) наз. ф. $F(t, x(t), y(t)) \equiv c$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой ~~кривой~~ интегральной кривой системы (1)

Утв.1 Ф. $F(t, x(t), y(t)) \equiv c$ явл. первым интегралом системы (1) $\Leftrightarrow$ ее производная в силу системы (1) $= 0$:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t), y(t))\Big|_{(1)} = 0$$

Система хищник-жертва. Размножение жертв огр-ся давлением на них со стороны хищников. Размножение хищников огр-ся кол-вом добытой ими пищи. (кол-вом жертв):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my \quad (2)$$

где $x(t)$ - кол-во жертв

$y(t)$ - численность хищников

α - коэф. естественного прироста жертв

m - коэф естественной смертности хищников

$V(x) = \beta x$ - кол-во (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k-ая часть полученной биомассы энергии расходуется хищником на воспроизводство, остальное тратится на поддерживание основного обмена и охотничьей активности. Ф-ция $V(x)$ обычно наз. трофической ф-цией или функц. откликом хищника на плотность популяции жертвы

$x^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$ - стац. решение системы (2).

Докажем, что ф-ция $\left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha$ где $X = \frac{x}{x^*}$, $Y = \frac{y}{y^*}$ явл. первым интегралом системы (2)

Продиф. эту ф-цию по t.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha\right] = m\left(\frac{e^X}{X}\right)^{m-1} \cdot \frac{e^X \dot{X} X - e^X \dot{X}}{X^2} \cdot \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha +$$

$$+ \alpha\left(\frac{e^Y}{Y}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{e^Y \dot{Y} Y - e^Y \dot{Y}}{Y^2} \cdot \left(\frac{e^X}{X}\right)^m =$$

$$= \left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha \left[m\dot{X}\left(1 - \frac{1}{X}\right) + \alpha\dot{Y}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha}_{A} \left[m\dot{X} + \alpha\dot{Y} - \left(m\frac{\dot{X}}{X} + \alpha\frac{\dot{Y}}{Y}\right)\right] =$$

$$= \left\{X = \frac{x}{x^*},\ Y = y/y^*,\ x^* = \frac{m}{k\beta},\ y^* = \alpha/\beta\right\} = A\left[\dot{x}k\beta - \dot{y}\beta - \left(m\frac{\dot{x}}{x} + \right.\right.$$

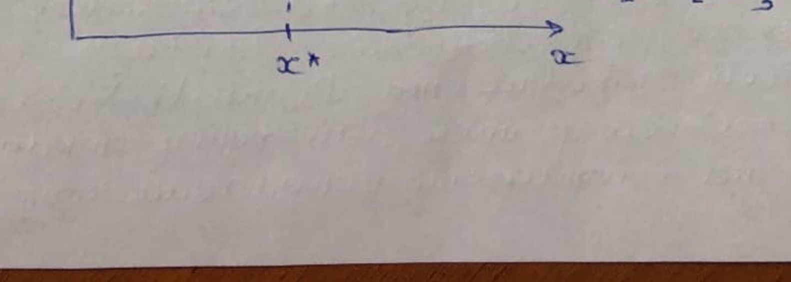
$$\left.\left. + \alpha\frac{\dot{y}}{y}\right)\right] = \{(2)\} = A\left[k\beta(\alpha x - \cancel{\beta x y}) + \beta(\cancel{k\beta x y} - my) - \right.$$

$$\left. - (\cancel{\alpha m} - \beta m y + \alpha k\beta x - \cancel{\alpha m})\right] = A\left[k\beta\alpha x - \beta m y - (-\beta m y - \alpha k\beta x)\right] =$$

$$= 0$$

Из утв. 1 $\Rightarrow \left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha$ явл. 1-ым интегралом системы (2)

Ур $\left(\frac{e^X}{X}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha = c$ описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, соотв. фазовым траекториям периодич. решений системы (2). Заметим, что при увел. c амплитуды колебаний x и y возраст.



Билет 23 почти дописал

Опр. 1 Квадратная матрица $A_{n\times n}$ наз-ся разложимой если одновременной перестановкой строк и столбцов ее можно представить в виде: $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$, $A_1(m\times m)$, $A_3((n-m)\times(n-m))$, $m<n$

Утв. 1: Если A разложима, то и A^2 разложима, причем $A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & \bar{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$

Теорема (Фробениуса-Перрона)

Если неотриц. матр. A неразложима, то у нее $\exists$ собств. число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ спр-во $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый собств. вектор-столбец x_A, $(Ax_A = \lambda_A x_A)$, и левый собственный вектор-строка y_A, $(y_A A = \lambda_A y_A)$, положительны

Опр. 2 Собств. число λ_A наз. фробениусовым числом, а векторы x_A, y_A - правым и левом фробениусов. векторами.

Пусть $r = \min\limits_{i=1,N} r_i$, $R = \max\limits_{i=1,N} r_i$, где $r_i = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}$

Утв. 2: Если A неотриц. неразлож. матрица, то при $r<R$ ее фробенус. число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Опр. 3 Неотриц. матр. A наз продуктивной, если $\exists$ неотриц. матрица $(E-A)^{-1}$

Утв. 3: Неотриц. неразлож. матр. A продуктивна $\Longleftrightarrow$ ее фробениус. число $\lambda_A < 1$

Задача

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Билет 24

Модель Краснощекова:

$$P_j = \alpha_j \mu_j + (1-\mu_j)\sum \lambda_{ji} P_i, \text{ где } \underbrace{j = 1, \dots, N}_{\text{кол-во индивидуумов}}$$

Обозначения:

1) α_j - априорная оценка перехода индивида с индексом j в рассматр. состояние
2) μ_j - степень независимости индивида от окружающих
3) P_j - итоговая вер-ть перехода индивида j в рассматриваемое состояние
4) λ_{ji} - вер-ть того, что j-ый индивид поступит так же как и i-ый, т.е. перейдет в новое состояние с вер-тью P.

<u>Опр.</u> Если $\mu_j = 0$, то j-ый индивид наз. абс. независимым (не имеет своего мнения и никак не может повлиять на окружающих)

<u>Опр.</u> Если все $\mu_j = 0 \ \forall j = \overline{1, N}$, то такая группа наз. стадо

Модель Краснощекова в матр. форме:

$$P = AM + (E - M)\Lambda P$$

Для случая стада $M = 0 \Rightarrow (E - \Lambda)P = 0$

Сумма эл-тов каждой из строк матр. $(E-\Lambda)$, в силу $\underbrace{\text{св-в стохаст. матр.}}_{\text{св-ва: (вер-ть} \le 1)}$ Λ, равна $0 \Rightarrow$ опр-тель $(E-\Lambda)$ равен $0 \Rightarrow \exists$ бескон. число решений. Это объясняется отсутствием опред. стремлений.

Однако стадо движется не хаотично: все P_j равны между собой, т.е. индивиды подраж. друг другу: $P_j = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i$

При этом, если в коллективе появился индивид, у которого $\mu_k > 0$, то решение в модели становится единственным: $P_j = \alpha_k$, где α_k - априорная вер-ть k-го индивида. Т.е. поведение k-го индивида копируют все

Билет 25

Опр. Популяционная игра - это статист. модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов:

$$G = \langle J, f_i(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle$$

где J - мн-во стратегий участников игры

$\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распред. игроков по стратегиям

$\Pi = \{\pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j\in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс

$f_j(\pi, \omega)$ - выигрыши игроков, использующих ~~~~ стратегию j, в зависимости от распред. по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внеш. среды)

Опр. Равновесием по Нэшу популяц. игры G наз. такое равновесие π^*, что всякая стратегия, используемая с положит. частотой явл. оптимальным ответом на данное распред. при $\forall$ значении ω:

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J, (\pi_j^* > 0) \to j \in \operatorname{Argmax}_{i\in J} f_i(\pi^*, \omega) \quad (1)$$

Если $f_i(\pi, \omega) = a(\pi, \omega)\bar{f}_i(\pi) + b(\pi, \omega)$, $(a(\pi, \omega) > 0)$, т.е. разложима, то (1) эквив: $\forall j \in J: \pi_j^* > 0 \to j \in \operatorname{Argmax}_{i\in J} \bar{f}_i(\pi^*)$

Опр. Эволюц. устойчивой стратегией (ЭУС) для популяц. игры G наз. такое распред. π^*, что $\forall \omega \in \Omega\ \forall \pi \neq \pi^*, \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1): \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega)$$

где $f_\pi(\pi', \omega) = \sum_{j\in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ - средний ~~распред.~~ ~~~~ ~~~~ выигрыш смешанной стратегии, или распред. π, если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π'

Опр. Строгим равновесием популяц. игры G наз. такое ~~равновесие~~ распределение π^*, что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая явл. ед. лучшим ответом на это распределение:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, j \in J:\ \pi_j^* = 1$$

и

$$\forall i \neq j\ \forall \omega \in \Omega:\ f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon$$

Всякое ~~[illegible]~~ строгое равновесие явл. ЭУС.

Билет 26

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегию родителей и сохр их в течение всего времени жизни.
Пусть взаимодействие между индивидуумами популяции в каждый период времени описывается популяционной игрой $G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$.
Выигрыш $f_j(\pi, N)$ представляет собой сумму средней рождаемости $fer_j(\pi, N)$ и выживаемости $v_j(\pi, N)$ для индивидуумов, использующих стратегию j, если общая численность популяции равна N, а распред. по стратегиям π. Обозначим $N_j(t)$ - число особей, использующих в период ~~времени~~ t стратегии $j \in J$. Тогда динамика такой популяции описывается системой:

$$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t)) \qquad (1)$$

Таким образом, состояние системы в каждый ~~момент~~ ~~времени~~ период полностью хар-ся вектором $\overline{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно опред-ся распред. по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t) / N(t))_{j \in J}$.
Отметим, что в случае, когда $f_j(\pi, N) = a(\pi, N) \overline{f}_j(\pi)$ из системы (1) вытекает, ~~что~~ автономная модель динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t) \overline{f}_j(\pi(t)) / \sum_{j \in J} \pi_i(t) \overline{f}_i(\pi(t)), \; j \in J$$

Билет 27

В МДР предполаг., что в однородн. популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегии родителей (того же пола) и сохр. их в теч. всего времени жизни.

Взаимодействие между индивид. опис. популяц. игрой:

$$G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle,$$

где $f_j(\pi, N)$ - сумма средней рожд-ти $fer_j(\pi, N)$ и выж-ти $\vartheta_j(\pi, N)$ для индивид. исп. стратегию j, если общая числ-ть попул. равна N, а распр. по стратегиям π.

Динамика такой популяции опис:

$$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t)). \qquad (1)$$

где $N_j(t)$ - число особей, исп. в t страт. $j \in J$

Сост. сист. в кажд. период полностью хар-ся вектором $\overline{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по котор. однозн. ~~распр.~~ опред. распр. по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t)/N(t))_{j \in J}$

При $f_j(\pi, N) = a(\pi, N) \overline{f}_j(\pi)$ => автоном. м. динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t) \overline{f}_j(\pi(t)) / \sum_{i \in J} \pi_i(t) \overline{f}_i(\pi(t)), \quad j \in J$$

Теорема 1 (о связи р. Нэша и уст. точек МДР)

Пусть f_j разложима: $f_j(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \overline{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, $a(\pi, \omega) > 0$

Тогда

1) $\forall$ уст. (по Ляпунову) распр. π^* системы (1) явл. р. Нэша популяц. игры $\overline{G} = \langle J, \overline{f}_j(\pi), j \in J, \pi \in \Pi \rangle$
2) если нач. распр. $\overline{N}(0) > 0$ и для траектории $\{\overline{N}(t)\}$ $\exists \lim_{t \to \infty} \pi(t, \overline{N}(0)) = \pi^*$, то р. π^* - равн. Нэша указ. попул. игры

Теорема 2 (об асимпт. уст. ЭУС)

Пусть в усл. Т.1 π^* - ЭУС попул. игры G.

Тогда π^* - асимпт. уст. распр. системы (1)

Теорема 3 (о связи доминир. мн-в стратегий с динам. повед.)

Пусть J - строго доминир. мн-во страт. в игре $G' = \langle J, \ln f_j(\pi), j \in J, \pi \in \Pi \rangle$. Тогда $\forall j \notin J$ и $\forall \bar{N}(0) > 0$ $\lim\limits_{t \to \infty} \pi_j(t, \bar{N}(0)) = 0$ на соотв. траектории сист. (1)

Билет 28 (не дописан)

Пусть вз-ие в попул. хар-ся мн-в страт. S и ф. приспособл. $f_s(\pi)$, $s \in S$. В данной модели - индивидуум способен. различать сибсов (родных братьев и сестер) среди др. членов попул. и выбирать соотв. страт. в зав-ти от этого признака.

Полная страт. (s, s') вкл.: s - для сибсов
s' - для других

$\lambda_r \in (0, 1)$ - интенсивность вз-ия с сибсами

$1 - \lambda_r$ - интенсивность вз-ия с др. индив. в популяции.

Общая приспособл. аддитивно зависит от рез-тов вз-ия с родственниками и с остальной частью популяц.:

$$\bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f^r_s(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi')$$

где $f^r_s(s)$ - ф., опис. рез-ты вз-ия с сибсами

π' - расп. по комп. s'

Предполая, что все сибсы примен. одну (унасл.) стр-гию. Тогда вз-ие хар-ся попул. игрой:

$$\bar{G} = \langle \bar{S} = \{(s, s') \in S \times S\}, \bar{f}_{s,s'}(\bar{\pi}) \rangle$$

$\bar{\pi}$ - расп. по полным стр-гиям

Теорема

Всякая стр-гия (s, s'), в котор $s \notin \mathrm{Argmax}_i f^r_i(i)$, строго доминир.-ся стр-гией (s^*, s'), где $s^* \in \mathrm{Argmax}_i f^r_i(i)$. Распр. $\bar{\pi}^*$ явл. р. Нэша $\Leftrightarrow$ если для всех указ. неоптим стр-гий $\pi_{ss'} = 0$, а соотв. распред π' явл. р. Нэша для игры $\langle S, f_{s'}(\pi') \rangle$

Билет 29

Базовая модель. Формализация задачи.

1. Рассм. фикс. число N агентов ур. 0 (налогоплат.)
2. $\forall$ агента ур. 0 определен набор действий (налог. платежей) T_0 каждое действие t_0 хар-ся затратами агента.
Оптим. с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой сл. вел.-ны (дохода) $I \in [I_{min}, I_{max}]$ (например, $t_0^*(I)$ - заданное налоговое правило) $t_0 \in [t_{min}, t_{max}]$, где $t_{min} = t_0^*(I_{min})$, $t_{max} = t_0^*(I_{max})$
3. Независ. и одинаково распред. сл. вел I имеют ф-цию распр. $F(I)$, известную всем участникам инспекции
4. Для провед. инспекции могут исп-ся 2 типа сотрудников:
   - доверен. лица лидера, издержки на проверку которым очень высоки
   - $\forall$ необх. число рацион. инспекторов, максимизир. свой ожид. доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.
5. Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение сл. ~~вел~~. вектора I наб-ся только действующим на нижнем ур-не агентом.

Базовая модель. Задачи с фикс. затратами и штрафами.

Контрол. иерарх. структура строится след. образом.

1. Инспекторы 1-го ур. проверяют агентов ур. 0 с вер-тью $p_1(t_0)$
2. Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого ур. выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $f_0 > 1$
Стоимость 1ой проверки на этом ур. составл. c_1
3. Инспектор 1го ур. может вступить в сговор с провер. агентом. Для предотвращ. коррупции организ.-ся проверка 2-го ур-ня.
4. Вер-ть проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов ур. 0 и 1

5. ...

6. На верхнем ур. k честными инспекторами осуществл. проверка с вер-тью $p_k(t_0, t_1 \dots t_{k-1})$

7. Если проверка ур. l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты ниже стоящие ур. r $(r = 0, \dots l-1)$ в этой цепочке проверок платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$

В соотв. с этим подходом целью инспекции не является выявление коррупции. Вместо этого предполагается предотврат. отклон. от честного поведения на каждом ур.

Стратегия инспекции P включает:

- кол-во уровней k
- вер-ть проверок $p_1(t_0) \dots p_k(t_0, \dots t_{k-1})$

след. параметры заданы экзогенно в этой модели:

- штрафные коэф-ты $f_0 \dots f_{k-1}$
- Расходы на провеки $c_1 \dots c_k$

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого ур-ня с минимальными издержками на проверки

Билет 30

Рассмотрим коалицию C_l, включающую некоторое число агентов ур. 0 и инспекторов ур $1 \dots l$, $l < k$, проверяющих работу этой коалиции.

Стратегия C_l задается ф-циями $t_0(I), t_1(I) \dots t_l(I)$, определяющими сообщения ур-ней $i = 0 \dots l$ в случае проверки какого-либо агента ур. 0 из этой коалиции

Опр. Назовем стр-гию P устойчивой к отклонению коалиции C_l, если суммарный выигрыш ее членов достигается максимума при честном поведении, т.е. при $t_0(I) = t_0^*(I)$, $t_r(I) = t_0^*(I)$, $r = 1 \dots l$ при усл. честного поведения агентов верхних ур-ней $l+1 \dots k-1$ (1)

Опр. Назовем стратегию P устойчивой к коалиционным отклонениям, если усл. (1) вып-но для $\forall l = 1 \dots k-1$

При честном поведении ожидаемые затраты на 1го агента составят:

$$\int_{I_{min}}^{I_{max}} (p_1(P,I)(c_1 + p_2(P,I)(c_2 + \dots + p_{k-1}(P,I)(c_{k-1} + p_k(P,I)c_k) \dots) dF(I)$$

где $p_i(P,I) = p_i(t_0^*(I) \dots t_0^*(I))$

Утв.1 Оптим. вер-ти проверок в стратегии, устойчивой к коалиционным отклонениям, удовл. усл:

$$p_1(t_0) \equiv \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, \quad p_s(t_0 \dots t_{s-1}) \equiv \hat{p}_s = \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}$$

$\forall t_0 \le t_1 \le \dots \le t_{s-1} < t_{max}$, $s = 2 \dots k$

Теперь для заданной стратегии P рассм. некооперат. СПР и опред. усл. сущ.-ния СПР, соотв. честному повед на всех ур-нях $0 \dots k-1$

Рассм. сл. когда на каждом ур-не $s < l-1$ отклон. ур. 0 не было полностью выявлено ($t_{l-1} < t_0^*$)

Сговор выгодный для всех агентов $0 \ldots l$ возможен, если для некоторых $t_l \in [t_{l-1}, t_0^*(I))$, $b_{il} \geq 0$, $i = \overline{1, l-1}$ разрешима след. система:

$$\begin{cases} p_{l+1}(t_0 \ldots t_l) \cdot f_i \cdot (t_0^*(I) - t_l) + b_{il} < f_i(t_0^* - t_l), & i = \overline{0, l-1} \\ \sum\limits_{i<l} b_{il} - p_{l+1}(t_0 \ldots t_l) f_i (t_0^*(I) - t_l) > 0 \end{cases}$$

b_{il} - взятка, выплач. агентом ур. i последн. провер-щику

t_l - его сообщение

Опр. Если для $\forall\, I \in (I_{min}, I_{max}]$, $l = \overline{1, k-1}$; $t_0 \leq \ldots \leq t_l < t_0^*(I)$ система несовместна, будем говорить, что стратегия P определяет СПР с честным поведением

Утв. 2 Стратегия P опред. СПР с честным поведением $\Longleftrightarrow$ $\forall\, t_0 \ldots t_{k-1} < t_{max}$ вер-ти проверок удовл. усл:

$$p_1(t_0) \geq \frac{1}{f_0}, \quad p_2(t_0, t_1) \geq \frac{f_0}{f_0 + f_1}, \quad p_s(t_0 \ldots t_{s-1}) \geq \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} f_i}, \quad s = 2 \ldots k$$

Утв. 3 Оптим. стратегия в классе СПР с честным поведением и оптим. стратегия, уст-вая к коалиц. отклонениям, совпадают и удовл. усл:

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, \quad p_s(t_0 \ldots t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} f_i}$$

$\forall\, t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{s-1} < t_{max}$, $s = 2 \ldots k$

Билет 31 (возможно не все)

1. Векторно-конвейерные комп.
создание в середине 70-х годов (Cray 1)
Особенности арх-ры: векторные функц. устройства, зацепление функц устройств. векторные команды в систему команд, векторные регистры
Программирование: векторизация самых внутр. циклов

2. Векторно-параллельные комп.
Начало 80-х годов. Cray X-MP, Y-MP
Особенности арх-ры: векторн. функц. устр-ва, зацепление функц устр-в, векторн. команды в системе команд, векторные регистры.
Небольшое число процессоров объединяются над общей памятью
Программирование: векторизация самых внутр. циклов и распараллеливание на внешнем ур-не, единое адресное пр-во, лок. и глоб. переменные

3. Массивно-параллельные комп.
Начало 90-х Cray T3D, Intel Paragon
Особенности арх-ры: тысячи процессоров объединяются с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распред. память
Программирование: обмен сообщениями, отсутствие един. адресн. пр-ва, PVM, Message Passing Interface, необход. выделения массового параллелизма, явного распред. данных и согласования параллелизма с распределением

4. Параллельн. компьютеры с общей памятью
середина 90-х суперкомп. Sun StarFire, ?
Особенности арх-ры: сотни процессоров объедин. над общей памятью
Программирование: един. адресн. пр-во, лок. и глоб. переменные, Linda, OpenMP

5. Кластеры из узлов с общей памятью

Начало 2000-х Суперкомп. МГУ "Чебышев"

Особенности арх-ры: большое число микропроцес. узлов объедин. вместе с помощью коммуникац. сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объедин. над общей памятью

Программирование: неоднородн. схема MPI+OpenMP, необход. выделения массового параллелизма, явное распред. данных, обмен сообщениями на внешнем уровне, распараллеливание в едином адресном пр-ве, лок. и глоб. переменные на ур-не узла с общей памятью

6. Кластеры из узлов с общей памятью с ускорителями

~~Серед~~ Середина 2000-х Суперкомп. "Ломоносов"

Особенности арх-ры: большое число многопроц. узлов объедин. вместе с помощью коммуникац. сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объедин. над общей памятью; на каждом узле несколько ускорителей (GPU, Phi)

Программирование: MPI + OpenMP + OpenCL/CUDA

Билет 32

Особенности современ. микропроцессоров:

1. один процессор, как правило, содержит несколько ядер
2. исп-ся многоуровневая система кэширования доступа к памяти (L1 кэш очень быстрый и для 1го ядра; L2 кэш больше, но медленнее, но все еще для одного ядра; L3 кэш еще больше и для всего процессора) кэшируются как данные так и инструкции.
3. процессор может переупорядочивать или смешивать инструкции и доступы к памяти
4. появл-ся физ. акселераторы для некоторых вычисл. задач (например, для криптографии или архивирования/кодирования
5. инструкции конвейеризируются, т.е. разбиваются на мелкие части (вроде получения инструкции, декодирования инструкции, чтения операнда из памяти, вычисления выражения и записи результата, на самом деле у современных процессоров таких частей 16-32), что ускоряет работу инструкций
6. появляются специализированные процессоры, например, GPU. Они имеют свои особенности: огромное число ядер (которые одновременно исполняют одну и ту инструкцию), специальные правила доступа к памяти, большое кол-во регистров

Билет 33 (возможно нужно дополнить)

Ломоносов состоит из гибридных вычисл. ~~[illegible]~~ узлов на процессорах Intel Xeon (либо 2 процессора по 4 ядра, либо 2 процессора по 6 ядер и 12-48гб памяти на узле) и GPU-процессоров Nvidia. Кол-во x86 узлов: 5104, граф. узлов 1065, x86 процессоров/ядер 12346/52168, граф. ядер 954240, суммарная операт. память 92 Тб. Узлы соед. 4-мя сетями: Infiniband для вычислений, 2 x Gigabit Ethernet для сервисной и управл. сети, и отдельная сеть для глоб. барьеров и прерываний. Есть общая ФС
Пиковая произв-ть: 1.7 Пфлопс

BlueGene/P – массивно-параллельн. вычисл. система, которая состоит из ~~[illegible]~~ вычисл. узлов с двумя процессорами PowerPC 440 700MHz (в процессоре по 4 ядра) и 2GB памяти на узел. В одной стойке находится 1024 вычисл. узла, есть 2 стойки. Суммарное кол-во ядер - 16384, память 4TB.
Есть 5 коммуникативных сетей: тор для пересылок точка-точка, сеть для коллективных операций, сеть для глобальных барьеров и прерываний, функц. и сервисная Ethernet-сети. Пиковая произв-ть: 28 Тфлопс.

Билет 34 и 35 (не очень понятно, что относ. к 34. и возможно, нужно больше в 35)

Опр. Посл-ная сложность алгоритма - число операций, которые нужно выполнить при его посл-ном исполнении.

Опр. Параллельная сложность алгоритма - число шагов, за которое можно вып-ть данный алгоритм в предположении доступности неогр. числа необх. процессоров (функц. устройств, вычисл. узлов, ядер и т.п.)

Опр. Граф алгоритма - ориентир. ацикл. мультиграф, вершины которого соотв. операциям алгоритма, а дуги - передачи данных между ними. Вершины графа алгоритма могут соед. несколькими дугами, в частности когда в качестве разных аргументов ~~опер.~~ одной и той же операции исп-ся одна и также вел-на. Граф алгоритма почти всегда явл. параметриз. графом. Он исп-ся как удобное представление алгоритма при исследовании его структуры, ресурса параллелизма, а также других св-в. Его можно рассматр как параметр. информационную историю. Он сохр. ее информативность, при этом обладая компактностью за счет параметриз. Разработана методика построения графа алгоритма по исходному тексту программы.

Опр. Ярусно-паралл. форма (ЯПФ) - это представление графа алгоритма в котором:

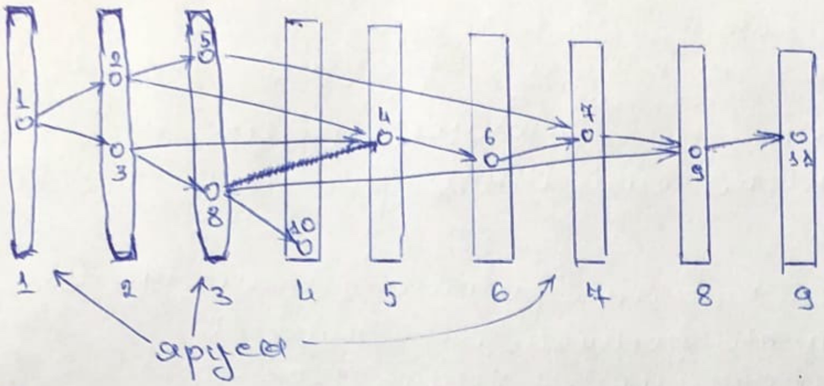
- все вершины разбиты на перенумер. подмн-ва ярусов.
- нач. вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечн. вершины
- между вершинами расп. на одном ярусе не может быть дуг.

Опр. Высота ЯПФ - это число ярусов. Ширина яруса - число вершин, располож. на ярусе.

Опр. Ширина ЯПФ - это max. ширина ярусов в ЯПФ.

Опр. канонич. ярусно-паралл. формой наз. ЯПФ, высота которой на единицу больше длины критич. пути, а все входные вершины располож. на первом ярусе. Для заданного графа его канонич. ЯПФ од-на. Высота канонич. ЯПФ соотв. паралл. сл-ти алгоритма. Критич. путь графа - путь max. длины в ориентир. ~~графе~~ ацикличн. графе.

Опр. Степень параллелизма - число операций, которые можно вып-нять в ∨ порядке



Опр. Ресурс параллелизма - это где и насколько мы можем сделать программу более эффективной за счет распараллеливания

Закон Адама: $S_p \le \dfrac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$

где S_p - ускорение

α - доля послед. операций

p - число процессоров в системе

Билет 36 (я бы не доверял этому билету)

Рассмотрим конкр. задачу: ур Лапласа на прямоуг.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; x \in [0,1]. \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(x,1) = \sin(\pi x) e^{-x} \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 5-точечный шаблон:

$$u_{ij}^{n+1} \cong \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n}{4}$$

2	5	8
1	4	7
пр-сс 0	3	6

Создается декартова топология (механизм сопоставления процессами некоторого коммуникатора альтернат. схемы адресации; виртуальный)

Необходим обмен данными на границах, будем использовать след. функции MPI

Создание топологии:

1. Создание топологии:
   int MPI_Cart_create(MPI_Comm oldcomm, int ndims, int*dims, int*periods, int reorder, MPI_Comm *cartcomm)
2. Определение декарт. коорд процесса по его рангу
   int MPI_Cart_coords(MPI_Comm comm, int rank, int ndims, int*coords)
3. Определение ранга процесса по его декарт. коорд-там
   int MPI_Cart_rank(MPI_Comm comm, int*coords, int*rank)
4. Разбиение решетки на под решетки меньшей раз-ти
   int MPI_Cart_sub(MPI_Comm comm, int*subdims, MPI_Comm*newcomm)
5. Операция сдвига данных вдоль каких-то направл. дек. решетки
   int MPI_Cart_Shift(MPI_Comm comm, int dir, int disp, int*source, int*dst)
6. Получение информации о топологии по ком-ру и числу измер.
   MPI_Cart_get(MPI_Comm comm, int ndims, int*dims, int*period, int*coords)

Блокирующие передачи

1. Передача сообщения
int MPI_Send(void*buf, int count, MPI_Datatype datatype,
int dest, int msgtag, MPI_Comm comm)

2. Получение сообщения
int MPI_Recv(void*buf, int count, MPI_Datatype datatype,
int source, int msgtag, MPI_Comm.comm, ~~MPI_Status~~
MPI_Status *status)

Коллективные операции:
Осн ~~отличия~~ особенности и отличия от комм. типа "точка-точка"

- на прием и/или передачу работают одновр все задачи - абоненты указываемого коммуникатора
- коллективная ф-ция вып-ет одновр. и прием, и передачу; она имеет большое кол-во параметров, часть которых нужна для приема, а часть для передачи; в разных задачах та или иная часть игнор-ся.
- как правило, значение ~~во~~ всех параметров (за искл. адресов буферов) должны быть идентичн. во всех задачах.
- MPI назнач. идентификатор для сообщения авт-ки
- сообщения передаются не по указ. коммуникатору, а по временному коммуникатору - дупликату: тем самым потоки данных коллективн. ф. надежно изол-ся друг от друга и от потоков созд. ф-циями "точка-точка"

1. Широковещательная рассылка данных
int MPI_Bcast(void*buf, int count, MPI_Datatype datatype,
int source, MPI_Comm comm)

2. Сбор блоков данных, посылаемых всеми процессами группы, в один массив процесса
int MPI_Gather(void*sbuf, int scount, MPI_Datatype stype,
void* rbuf, int rcount, MPI_Datatype rtype,
int dest, MPI_Comm comm)

3. Вып-ние count глоб. операций op с возвратом count рез-тов во всех процессах в буфере rbuf.
int MPI_AllReduce(void*sbuf, void*rbuf, int count,
MPI_Datatype datatype, MPI_OP, op,
MPI_Comm comm)

Билет 30 (продолжение)

4. Ф-ция аналогична предыдущей, но рез-т будет записан в буфер rbuf только у процесса root

```
int MPI_Reduce(void *sbuf, void *rbuf, int count, ~~MPI_Datat~~
               MPI_Datatype datatype, MPI_Op op, int root
               MPI_comm comm)
```

Билет 37

Рассмотрим ур. Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{\tilde{v}} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} + (\vec{\tilde{v}}, \nabla)\vec{\tilde{v}} + \dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}\tilde{p} = +\nu \Delta \vec{\tilde{v}} \end{cases}$$

$\vec{v}$ - скорость течения, p - давление } неизвестные

После обезразмеривания получаем систему:

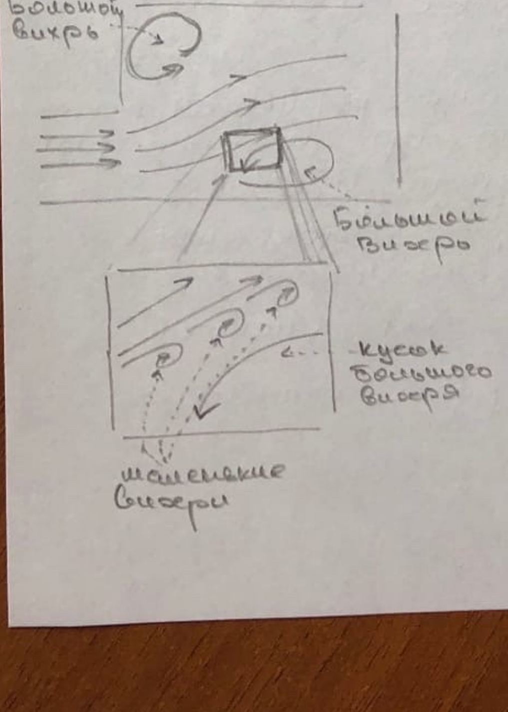
$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \operatorname{grad} p = \dfrac{1}{Re}\Delta \vec{v} \end{cases} \quad (1)$$

Известно, что при дост. больших Re (при $Re > Re_{crit}$ для разных областей это Re_{crit} разное) возникают турбулентные течения.

Стоит сказать, что определение турбулентности толком никто дать не может, но в целом это подобно течению с большим числом нестационарных вихрей. При больших Re вклад переносных членов $(\vec{v}, \nabla)\vec{v}$ превышает вклад вязкости $\Delta\vec{v}$, и начинается болтанка.

Основное св-во турбулентности - это ее многомасштабность, т.е. в течении возникает большое число вихрей от больших до совсем малых.

Течение в области "ступенька Вихрей"



Самый маленький вихрь имеет размеры колмогоровских масштабов, которые определяются Re (чем больше Re, тем меньше могут быть вихри).

Для моделирования течения надо вводить сетку в рассматр. области. Если введем сетку крупнее колм. масштабов ⇒ не уловим мелкие вихри

Есть 3 осн. идеи моделир. турбулентности:

DNS (direct numerical simulation)

LES (large eddy simulation)

RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)

DNS:

Аппроксимирует ур. (1) на очень мелкой сетке, улавливающей мелкие вихри. Если использовать явные схемы, то из-за мелкой сетки будут ужасные огр. на шаг по времени ⇒ нужен суперкомпьютер. Неявн. схемы - огр на шаг по времени уже не такие жесткие, но получаем огромную СЛАУ, которая может не влезть в ОЗУ ⇒ нужен суперкомп.

LES: ~ моделир. крупных вихрей

Тут в основном берут сетку крупнее Колмогоровских масштабов (⇒ теряют мелкие вихри) и опять решают на ней (1). Мелкие вихри потом пытаются восстановить по каким-нибудь эмпирическим моделям, взятым из физ. экспериментов. Тут тоже нужен суперкомп. т.к. сетки все еще мелкие, но зато все уже решается быстрее.

RANS:

Здесь уже меняют ур. (1)

Представляют $\vec{v} = \vec{v}_{ср} + \delta\vec{v}$, где $\int_0^T \delta\vec{v}\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^T \vec{v}\,dt = T\cdot\vec{v}_{ср}$

~ какие то флуктуации.

Все это дело подставляется в (1), интегрируется по времени и получаются почти такие же ур., но уже для средних величин и еще в правую часть добавл. тензор вязких напряжений $\frac{\partial(\delta v_i, \delta v_j)}{\partial x_k}$. Здесь мы не знаем δv_i, они обычно задаются эмпирич. ~~ф-ми~~ формулами через $\vec{v}_{ср}$ на основе физ. эксперементов.

Здесь уже расчеты проводятся на грубых сетках ⇒ ⇒ можно исп. ПК.

Билет 38 (возможно не полностью, нужно проверить 2-ю часть)

Рассмотрим на примере квантовомех ур. (метод "из первых принципов"). Необходимо решить ур. квант. механики и рассчитать поверхности потенц. энергии системы, межмолек. связей, электр. конфигурации.

При построении этой модели исход. из след.:

1. Потенциал взаимод. между заряж. частиц. - закон Кулона. Нет подгоночн. параметров.

2. Наномасштаб (пр-венный $\sim 10^{-10}$, врем. $\sim 10^{-15}$ с.)

3. Метод модемр. наносистем - молекул. динам. из первых принципов CPMD, мат. модель молекул динамики Кар-Парринелло на основе приближ Борна-Оппенгеймера. Будем. исп. квант-мех. фор-ку, основ. на ур. ф-ла пл-ти (DFT) Идея Кар-Парринелло состоит в исп-нии квант-мех. раздел. времен. масштабов быстрого эл-ного движения и медленого движ. ядер. Этот м. реализован в числ. коде молекул. динам. CPDM. Основн. вним. удел. вычисл. барьера на пов-ти свобод. энергии. Модемр. молекул. переключ. состоит из след. шагов: 1) оптимиз. геометрии молекул
2) провод. термолизация молекулы взаимод. с термостатом Нозе-Хувера и достиг. термодинам. равн-сие

4. Подход требует исп-ние суперкомп-ров и эфф-ных параллельных вычисл для опис-ния больших молекул. систем $\sim$ 25000 атомов

5. Масштабируемость CPMD кодов

Числ. параллел. реализ. CPMD:

Расчет эл-ной структуры молекулы самый затратный по времени: Если N_e - число электронов в системе, то вычисл сложность = $O(N_e^3)$. Для реш. исп-ся прямое и обр. преобр. Фурье

Параллел. стратегии Несколько ур. распараллел.

- крупно блочное распараллел. С помощью MPI производ. распред. коэф-тов Фурье волн. ф-ций для всех эл. состояний на все процессы

- 3dFFT - метод. Исп-ся для перехода из реал. пр-ва в Фурье-пр-во и обратно. Распред. данных произ-ся так, что число обменов с поддерж. загрузки в обоих пр-вах минимиз.

- OpenMP - распараллел. Примен для распараллел длинных циклов, с общей памятью на узле

- Task groups - метод исп. организацию процессоров в группы. Процессоры организованы как двумерн. сетка

- Метод копирования. Исп-ся для вычисл интегралов по траекториям в молекул. динамики приквантов. ядер.

Билет 39

CPU - небольшое число мощных, независ. ядер, 3-х ур. кэш

GPU - вместо ядер потоковый мультипроцессор (streaming multiprocessor, SM)

1. 32 скалярных ядра CUDA cores ~ 1,5 ГГц
2. 2 Warp Schedduler (warp - 32 ядра)
3. Файл регистров, 128 КБ
4. 2-х ур. кэш
5. Текстурные юниты
6. 16 Special Function Unit - интерполяция ~ трансценд. матем. один. точности

Много простых ядер, работающих на небольшой частоте. Небольшие кэши на GPU: 32 ядра делят 64 КБ L1 кэш, общий L2 кэш, L3 нет.
Операт. память с высокой пропускной способностью и высокой латентностью, оптимизир. для коллект. доступа.
Т.к. память с высокой латентностью, то, чтобы эфф-но загружать ядра на много нитей и за счет быстрого переключения контекста перекрывать обращения др. нитей вычисления в др. имеется след. иерарх:

Нить → warp (32 нити) → Block (до 32 warp) → Grid (решетка из блоков)

Block и Grid - 3d, каждая нить, блок получают свои коорд.

На ур. нитей - SIMD - все нити вып-ют одно и то же действие с разными данными.

Warp-ы вып-ся независимо, наз. все - SIMT

Глобальная память:

Расположение в DRAM GPU, до 4 ГБ, можно выделять как с хоста, так и с устройства.
Работа оптимиз. так, чтобы отдать макс. число данных за одно обращение.

Транзакция - загрузка из глоб. памяти пула в 128 байт, начиная с адреса, кратного 128. Взаимод. идет через кэш.

Размер кэша линии L1 - 128 байт, L2 - 32 байта, можно работать не через L1 кэш, тогда транзакция ~~з~~ по 32 байта

Данные хранятся по строкам, чтобы добиться выравнивания по 128 байт. можно вос-ся cudaMallocPitch - передаем, сколько у нас будет входных данных, возращ. с учетом padding.

Билет 40 (возможно норм, а может и нет)

1) Утилизация латентности памяти

- Цель: эф-но загружать ядра
- Проблема: латентность памяти
- Решение: CPU: сложная иерарх. кэшей

GPU: Много нитей, покрывать обращения одних нитей в память вычисл. в других за счет быстрого переключ. контекста. За счет наличия сотен ядер и поддержки миллионов нитей (потреб.) на GPU легче утилизир. всю полосу пропускания.

2) SIMT

Виртуальная:
- GPU может поддерж. млн. вирт. нитей
- Виртуальные блоки независимы

Аппаратная:
- Мультипроцессоры независ
- Можно "нарезать" GPU с различ. кол-вом SM

3) Асинхрон. в CUDA

Чтобы GPU больше времени работало в фон. режиме паралл с CPU, некотор вызовы явл. асинхронными. Отправляют команду на уст-во и сразу возвращ. упр. хосту. К таким вызовам отн-ся:
- запуски ядра
- копир. между 2-мя областями памяти на уст-ве
- копир. с хоста на уст-во менее 64kB
- копир вып-мые функциями с окончан. *Async
- cudaMemSet

4) Работа с глоб. памятью
- Располож в DRAM GPU
- Объем до 4 Gb
  - Параметр уст-ва totalGlobalMem
- кэшируется в кэшах L1 и L2
  - L1 - на каждом мультипроцессоре (размер: max - 48kB, min - 16kB)
  - L2 - на уст-ве (max. размер - 768kB, параметр устройства l2CacheSize)

Общие принципы эф-ной работы

- Обращение нитей варпа в память должно быть пространственно-локальным

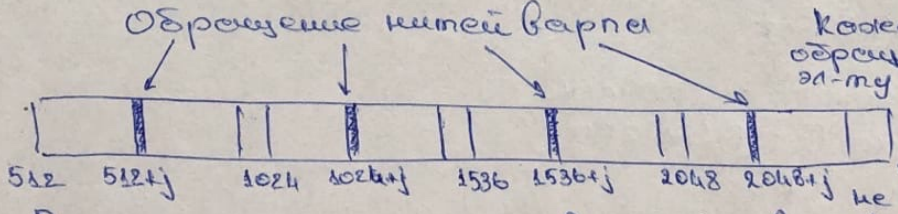
- Начала строк матрицы должны быть выровнены
  Пусть матр. хран. в лин. виде по строкам. Длина строки = 480 байт
  480 не кратно 128 ⇒ большая часть строк не выровнена ⇒
  ⇒ 2 транзакции. Дополним ~~по~~ каждую строку 480 + 32 = 512
  512 кратно 128 ⇒ все строки выровнены ⇒ 1 транзакция

- Использование массивов структур.
  помогает избежать лишних транзакций при обращ. варпа в память

- Выбор режима кэша L1
  Кэш. может быть в 2х режимах: 16kB и 48kB
  Возможн. режимы:
  - cudaFuncCachePreferNone - выбир. посл. исп. конфиг. нач. конфиг: 16kB L1
  - cudaFuncCachePreferShared - 16kB L1
  - cudaFuncCachePreferL1 - 48kB L1

- Избегать косвенной адресации
  - требует двух чтений из памяти (сначала A[i], потом A[i][j])
  - A[i] для разных нитей варпа скорее всего будут в 1ой кэш-линии ⇒ одно обращ. к ~~кэшу~~
  - A[i][j] в общем сл. могут быть разбросаны

- Избегать обращений нитей варпа к столбцам матрицы
  матр располож. по строкам, а обращ. происх по ~~столбцам~~ столбцам



Каждая нить варпа обращ. в свою строку к эл-ту в столбце j.
Если матр имеет размер > 128 байт, то эти обращ. ни за что не влезут в 1 транзакц.

Решение: хранить матр в трансп. виде!

- В случае сильно разряж. доступа проверять работу с отключенным кэшем
  - Транзакция - вып-ние загрузки из глоб. памяти сплошного отрезка в 128 байт, с началом кратным 128
  - Инструкция обращ. в память вып-ся одновр. для всех нитей
    - Вып-ся столько транз-ций, сколько нужно для покрыт. обращ. всех нитей варпа
    - Если нужен 1 байт - все равно загрузится 128
  - Ядро взаим не с памятью на прямую а с кэшем
  - Транзакция - вып-ние загрузки кэш-линии
  - Можно обращ-ся в память минуя L1